УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ СЛОЖНОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ АРБИТРАЖНОЙ СХЕМЫ

Калашников А.О.[1], Аникина Е.В.[2]

Цель статьи: *построение механизмов управления рисками сложной сети в условиях неопределенности, когда функции локальных рисков узлов сети являются случайными.*

Метод исследования: *обобщенный теоретико-игровой подход на основе обобщенной арбитражной схемы (МС-решение), ключевым элементом которого является возможность иерархического упорядочивания узлов сети в соотвествии со значениями их локальных рисков, когда функции локальных рисков узлов являются случайными. При этом, в качестве механизма упорядочивания локальных рисков предлагается использовать линейные или квадратичные функционалы специального вида.*

Полученный результат: *рассмотрена общая модель сложной сети, в рамках которой взаимодействуют два субъекта: природа и игрок. В рамках модели каждый субъект осуществляет воздействие на сеть путем распределения имеющегося в его распоряжении ресурса между ее узлами. Для оценки состояния узлов сети используются функции локального риска, удовлетворяющие некоторым заданным требованиям. При этом считается, что природа распределяет доступный ей ресурс и тем самым воздействует на узлы случайным образом, а игрок пытается снизить локальные риски узлов сети осуществляя в том или ином смысле эффективное распределение ресурса между ними.*

Ключевые слова: *локальный риск, максимально стимулирующее решение, линейный функционал, квадратичный функционал.*

DOI: 10.21681/2311-3456-2022-1-95-101

Введение

В настоящее время в России, в рамках программ реализации ряда Национальных проектов, например, таких, как «Цифровая экономика», «Наука», «Образование», «Здравоохранение», «Жильё и городская среда», «Экология» и ряде других, создается большое количество крупномасштабных, распределенных систем, зачастую не имеющие аналогов как по своей сложности, с одной стороны, так и по размерам потенциальных угроз, возникающих в случае их отказа или некорректной работы, с другой [1, 2]. В основе данных систем лежат сложные компьютерные и телекоммуникационные сети, безопасность которых является ключевым элементом обеспечения безопасности систем в целом, что делает задачу управления рисками сложных сетей как никогда актуальной и злободневной. Причем, это касается не только активного внедрения существующих методов и средств информационной безопасности и управления рисками, но и их совершенствования, а также развития новых подходов для решения указанных проблем.

Одним из таких подходов может стать использование различных теоретико-игровых моделей, в том числе, на основе арбитражных схем [3-5]. В работе [3] рассматривалась общая модель гетерогенной сети, в рамках которой субъект осуществляет управление рисками путем эффективного, в том или ином смысле, распределения имеющегося в его распоряжении однородного ресурса между ее узлами. Для оценки текущего состояния узлов сети были предложены функции локального риска, удовлетворяющие некоторым заданным условиям, а для оценки состояния сети в целом – функция интегрального риска. Предполагалось, что все функции локального риска являются детерминированными, однако информация об их конкретном виде у субъекта управления отсутствует. Было показано, что в случае отсутствия взаимного влияния узлов сети друг на друга для нахождения эффективного распределения ресурса может быть использован теоретико-игровой подход с использованием арбитражной схемы, основанной на принципах стимуляции и неподавления (МС-решение). В работах [4-5] был рассмотрен случай, когда узлы сети являются зависимыми и могут оказывать на локальные риски друг друга определенное воздействие. Для решения данной задачи был использован другой теоретико-игровой подход с использованием игры на когнитивной карте («когнитивная игра»).

В настоящей работе указанный подход развивается и обобщается на случай, когда функции локальных рисков отдельных узлов являются, вообще говоря, случайными функциями. Вводится понятие обобщенной арбитражной схемы, основанной

1 Калашников Андрей Олегович, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории «Сложных сетей» ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия. E-mail: aokalash@ipu.ru

2 Аникина Евгения Владимировна, научный сотрудник лаборатории «Сложных сетей» ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия. E-mail: janet0584@mail.ru

на принципах стимуляции и неподавления (ОМС-решения). При этом, в качестве механизма упорядочивания локальных рисков предлагается использовать линейные или квадратичные функционалы специального вида.

Общая модель

Рассмотрим гетерогенную сеть, состоящая из множества узлов: $S=\{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n\}$, $i\in N=\{1,\ldots,n\}$. В рамках общей модели предположим:

- все узлы сети $s_i\in S$ являются независимыми в смысле отсутствия влияния одного узла на локальные риски других узлов;
- существуют два субъекта, которых мы будем называть игрок N (иначе, природа, *nature*) и игрок D (иначе, защитник, *defender*);
- игрок D располагает некоторым *известным* объемом ресурса $X\ge 0$, который он может произвольным образом распределять между узлами сети S: $x=(x^1,\ldots,x^n)$, $x^i\ge 0$, $i\in N$, $\sum_{i=1}^{n}x^i\le X$;
- игрок N располагает некоторым *неизвестным* объемом ресурса $\Phi\ge 0$, который он *случайным* образом распределяет между узлами сети S (можно считать, что для игрока N задано множество положительных, попарно независимых случайных величин $\{\varphi^i\ge 0, i\in N\}$).

Сопоставим каждому узлу $s_i\in S$, $i\in N$, пару неотрицательных чисел $(x^i,\varphi^i)\in\mathbb{R}^2$ и определим *случайную функцию локального риска* $\rho_i(x^i,\varphi^i):\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$. Будем считать, что состояние сети S описывается *случайной вектор-функцией риска* $(\rho_1(x^1,\varphi^1),\ldots,\rho_n(x^n,\varphi^n))$.

Обозначим: $\tilde{\varphi}^i\ge 0$ некоторую реализацию с.в. φ^i, $i\in N$ и будем предполагать, что в рамках рассматриваемой модели случайные функции локального риска $\rho_i(\cdot\,,\cdot)$, $i\in N$, обладают следующими свойствами:

P1: для любых $i\in N$, $x^i\ge 0$, $\tilde{\varphi}^i\ge 0$: $\rho_i(x^i,\tilde{\varphi}^i)\ge 0$;

P2a: для любых $i\in N$, $x_1^i\ge 0$, $x_2^i\ge 0$, $\tilde{\varphi}^i\ge 0$ таких, что $x_1^i<x_2^i$: $\rho_i(x_1^i,\tilde{\varphi}^i)>\rho_i(x_2^i,\tilde{\varphi}^i)$;

P2б: для любых $i\in N$ $\tilde{\varphi}_1^i\ge 0$, $\tilde{\varphi}_2^i\ge 0$, $x^i\ge 0$ таких, что $\tilde{\varphi}_1^i<\tilde{\varphi}_2^i$: $\rho_i(x^i,\tilde{y}_1^i)<\rho_i(x^i,\tilde{y}_2^i)$;

P3a: для любых $i\in N$, $x^i\ge 0$, $\tilde{\varphi}^i\ge 0$: существует число $\rho_i^\infty(\tilde{\varphi}^i)>0$ такое, что $\rho_i(x^i,\tilde{\varphi}^i)>\rho_i^\infty(\tilde{\varphi}^i)$;

P3б: для любых $i\in N$, $x^i\ge 0$, $\tilde{\varphi}^i\ge 0$: существует число $\rho_i^\infty(x^i)>0$ такое, что $\rho_i(x^i,\tilde{\varphi}^i)<\rho_i^\infty(x^i)$.

Из свойств P1-P3б следует, что случайные функции локального риска $\rho_i=\rho_i(\cdot\,,\cdot)$, $i\in N$ представляют собой семейство независимых, неотрицательных, ограниченных и строго монотонных случайных функций, убывающих по первому и возрастающих по второму аргументу, причем каждую из этих случайных функций, в свою очередь, можно рассматривать, как одномерную случайную величину ρ_i, $i\in N$ с функцией распределения F_i. В дальнейшем, будем считать, что в рамках общей модели задано некоторое семейство одномерных вероятностных распределений $\mathcal{F}=\{F_i, i\in N\}$.

Таким образом, общая модель управления рисками сложной сети в условиях «игры с природой» может быть задана следующим кортежем:

$$\langle \text{игрок } D, \text{игрок } N, \text{ресурс } X, \text{ресурс } \Phi, \text{сеть } S=\{s_i\},\{\rho_i\},\{F_i\}, i\in N\rangle \qquad (1)$$

Поскольку (подробнее см., например, [3]) конкретный вид случайных функций локального риска нам не известен, то представляется целесообразным перейти от «глобальной» задачи минимизации интегрального риска к «локальной» задаче снижения максимума локальных рисков, учетывая при этом, что ρ_i, $i\in N$ представляют собой случайные величины.

Обозначим:

$$\mathcal{X}(X)=\left\{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n : x^i\ge 0,\ i\in N, \sum_{i=1}^{n}x^i\le X\right\}$$ –

множество допустимых распределений игроком D ресурса X между узлами сети S. Тогда «задача защитника» может иметь вид:

$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\sup_{i\in N}\sup_{\tilde{\varphi}_i\in\Phi}\rho_i(x^i,\tilde{\varphi}_i) \qquad (2)$$

Для решения задачи (2) необходимо обобщить рассмотренную в работах [3-5] арбитражную схему, а также разработать метод, позволяющий упорядочивать узлы $s_i\in S$, сети S на основе их рискового потенциала, используя исключительно информацию об одномерных случайных величинах ρ_i, с функциями распределения F_i, $i\in N$.

Обобщенная арбитражная схема

Рассмотрим множество $I=\{I_k\}$, $k\in N=\{1,\ldots,n\}$, элементы которого будем называть *игроками* и соответствующий им класс $\mathcal{M}=\{A\}$ кооперативных игр, где каждая игра отождествляется с множеством возможных «выигрышей» ее участников: $A=\{a=(a_1,\ldots,a_n): a_i\ge 0, i\in N\}\subset\mathbb{R}_+^n$. Ввведем на $\mathcal{M}$ частичный порядок относительно предпочтения $\succeq$.

Обозначим $p=(p_1,\ldots,p_n)$ некоторую перестановку чисел $\{1,\ldots,n\}$ и предположим, что класс $\mathcal{M}$ разбит на пересекающиеся подклассы $\mathcal{M}_p$ такие, что при $A\in\mathcal{M}_p$ «вклад» в игру p_1-го игрока «не меньше» «вклада» p_2-го, а «вклад» p_2-го игрока «не меньше» «вклада» p_3-го игрока и так далее. Обозначим $\mathcal{M}_0=\bigcap_p\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{B}=\{b=(b_1,\ldots,b_n): b_i=b_j;\ i,j\in N; i\ne j\}\subset\mathbb{R}_+^n$ – биссектрису в $\mathbb{R}_+^n$.

Решением для игр из класса $\mathcal{M}$ будем называть определенную на $\mathcal{M}$ вектор-функцию множеств $\pi(A)=(\pi_1(A),\ldots,\pi_n(A))$ такую, что для любого $A\in\mathcal{M}$ вектор $\pi(A)\in A$ и $\pi_k(A)$, $k\in N$ – выигрыш *k*-го игрока в игре $A\in\mathcal{M}$.

Обозначим:

- $\bar{A}$ – замыкание множества A;
- $\delta(A)$ – граница множества A;
- (A) – оптимальная по Парето граница множества $A\in\mathcal{M}$;
- $e(A)=\Pi(A)\bigcap\mathcal{B}$ – «равномерное» решение.

Определим класс $\mathcal{P}$ «стимулирующих» решений $\pi(A)$ со следующими свойствами:

С1: для любого $A \in \mathcal{M}$: $\pi(A) \in \Pi(A)$.

С2: для любых $A_1 \in \mathcal{M}$ и $A_2 \in \mathcal{M}$ таких, что $A_1 \succeq A_2$: $\pi(A_1) \geq \pi(A_2)$, иначе, $\pi_k(A_1) \geq \pi_k(A_2)$, $k \in N$ и существует $j \in N$ такое, что $\pi_j(A_1) > \pi_j(A_2)$.

С3: для любого $A \in \mathcal{M}_p$: $\pi_{p_1}(A) \geq \pi_{p_2}(A) \geq \ldots \ldots \geq \pi_{p_n}(A)$(в частности: если $A \in \mathcal{M}_0$: $\pi_{p_1}(A) = = \pi_{p_2}(A) = \ldots = \pi_{p_n}(A)$), иначе: $\pi(A) \in \mathcal{B}$).

Свойства С1, С2 и С3, приведенные выше, совпадают с требованиями Т1, Т2 и Т3, предъявляемыми к «хорошим» решения задачи (2) представленной в [3-5].

В классе $\mathcal{P}$ может, найтись много решений, удовлетворяющих С1-С3 и задача состоит в том, чтобы выделить среди них наиболее эффективное для решения задачи (2). С другой стороны, без каких-либо дополнительных предположений о классе $\mathcal{M}$ класс $\mathcal{P}$ может вполне оказаться пуст.

Рассмотрим сначала случай двух игроков p_1 и p_2, и введем понятие МС-решения.

Определение 1. Для $A \in \mathcal{M}_p$, назовем решение $\hat{\pi}(A) \in A$ «максимально стимулирующим» (МС-решением) если:

1) $\hat{\pi}(A) \in \mathcal{P}$;

2) $\hat{\pi}_{p_1}(A) = \sup\limits_{\pi(A) \in \mathcal{P}} \pi_{p_1}(A)$.

Из Определения 1 следует, что если «вклад» в игру p_1-го игрока «не меньше» «вклада» p_2-го, то МС-решение дает p_1-му игроку максимальный, по сравнению с любыми другими решениями, удовлетворяющими С1-С3, выигрыш.

Утверждение 1. Пусть класс $\mathcal{P}$ не пуст и множества $A \in \mathcal{M}$ замкнуты, тогда МС-решение существует и единственено.

Доказательство. При доказательстве ограничимся рассмотрением класса $\mathcal{M}_{1,2}$. Поскольку класс $\mathcal{P}$ не пуст, то множество $V(A) = \{v : v = \pi(A), \pi(A) \in \mathcal{P}\}$ также не пусто. Пусть $\hat{\pi}(A)$ ставит в соответствие множеству $A \in \mathcal{M}_{1,2}$ точку из $\bar{V}(A)$ (замыкание А) с максимальной 1-й координатой. Такая точка, очевидно, единственная. При этом, если $A \in \mathcal{M}_0$, то $\hat{\pi}(A) = e(A)$, поскольку в этом случае $V(A)$ – одноточечное множество.

Докажем, что $\hat{\pi}(A) \in \mathcal{P}$. Выполнение свойств С1 и С3 очевидно, поэтому докажем выполнение свойства С2.

Пусть $B \succeq A$ и предположим, что $\hat{\pi}_1(B) < \hat{\pi}_1(A)$. По построению для любого $\pi(A) \in \mathcal{P}$: $\pi_1(B) \leq \hat{\pi}_1(B)$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\pi^{\varepsilon}(A) \in \mathcal{P}$ такой, что $\pi_1^{\varepsilon}(A) \geq \hat{\pi}_1(A) - \varepsilon$. Полагая $\varepsilon = (\hat{\pi}_1(A) - \hat{\pi}_1(B))/2$, получим: $\pi_1^{\varepsilon}(A) > \pi_1^{\varepsilon}(B)$, что противоречит предположению, что $\pi^{\varepsilon}(A) \in \mathcal{P}$.

Предположим теперь, что $\hat{\pi}_2(B) < \hat{\pi}_2(A)$. Поскольку $\hat{\pi}(A) \in \Pi(A)$ и $A \in \mathcal{M}_{1,2}$, то для любого $\pi(A) \in \mathcal{P}$ справедливо: $\pi_2(A) \geq \hat{\pi}_2(A)$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\pi^{\varepsilon}(A) \in \mathcal{P}$ такой, что $\pi_2^{\varepsilon}(B) \leq \hat{\pi}_2(B) + \varepsilon$. Полагая $\varepsilon = (\hat{\pi}_2(A) - \hat{\pi}_2(B))/2$, получим: $\pi_2^{\varepsilon}(B) < \pi_2^{\varepsilon}(A)$, что противоречит предположению, что $\pi^{\varepsilon}(A) \in \mathcal{P}$. ■

Отметим, что Утверждение 1 существенно обобщает аналогичные предложения в [1, 2, 6-10], хотя методика доказательства отличается очень мало.

Рассмотрим общий случай.

Обозначим: $V_+^0 = \{v = (v_1, \ldots, v_n) : v_i > 0, i \in N\}$ и $K(A) = \delta(A) \cap V_+^0$ – замыкание границы $A \in \mathcal{M}$ в положительном ортанте пространства V_+^0.

Предположим, по аналогии с [1, 2, 6-10], что множества $A \in \mathcal{M}$ с введенным на нем предпочтением $\succeq$ удовлетворяют следующим условиям:

У1: $A \in \mathcal{M}$ – компактно;

У2: $(0, \ldots, 0) \in A$;

У3: $K(A)$ «охватывает» точку $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (иначе, любая исходящая из точки $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ уходящая в бесконечность кривая ℓ пересекает $K(A)$;

У4: $K(A) \subset \quad (A)$;

У5: если $B \succeq A$, то $B \sqsupseteq A$, где знак «$\sqsupseteq$» означает, что множество B содержит множество A или совпадает с ним.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Класс $\mathcal{P}$ не пуст.

Доказательство. Рассмотрим «равномерное» решение $e(A) = \delta(A) \cap \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ биссектриса V_+^0. В силу У1-У3 и свойств $\mathcal{B}$ множество $\delta(A) \cap \mathcal{B}$ не пусто, а в силу У4 имеем: $e(A) = \Pi(A) \cap \mathcal{B}$. Свойство С1 выполнено.

Пусть $B \succeq A$, тогда в силу строгой монотонности $\mathcal{B}$ и У5 имеем $e(A) \leq e(B)$. Свойство С2 выполнено.

Выполнение С3 очевидно и, таким образом, $e(A) \in \mathcal{P}$. ■

Обобщим понятие МС-решения.

Определение 2. Для $A \in \mathcal{M}_p$, назовем решение $\hat{\pi}(A) \in A$ «обобщенным максимально стимулирующим» (ОМС-решением) если:

1) $\hat{\pi}(A) \in \mathcal{P}$;

2) $\hat{\pi}_{p_1}(A) = \sup\limits_{\pi(A) \in \mathcal{P}} \pi_{p_1}(A)$;

$\hat{\pi}_{p_2}(A) = \sup\limits_{\pi(A) \in \mathcal{P}_{p_1}} \pi_{p_2}(A)$;

$\hat{\pi}_{p_{n-1}}(A) = \sup\limits_{\ldots \pi(A) \in \mathcal{P}_{p_1 \ldots p_{n-2}}} \pi_{p_{n-1}}(A)$,

где

$$\mathcal{P}_{p_1 \ldots p_k} = \{\hat{\pi}(A) : \hat{\pi}(A) \in \mathcal{P}, \pi_{p_1}(A) = = \hat{\pi}_{p_1}(A), \ldots, \pi_{p_k}(A) = \hat{\pi}_{p_k}(A)\}.$$

Как было показано еще в [10], прямой перенос доказательства Утверждения 2 (см., например, [1, 2, 6-9]) на общий случай невозможен, поскольку после выбора решения с монотонной 1-й координатой (для случая $\mathcal{M}_{1,2,\ldots,n}$, например), которая предоставляет *максимальный выигрыш* 1-му игроку, при распределении остатка между остальными игроками может оказаться, что не существует ни одного монотонного решения, который бы осуществил данное распределение.

Таким образом, задача сводится к поиску дополнительных (и не очень жестких) условий на множества $A \in \mathcal{M}$, которые обеспечивали существование хотя бы одного нетривиального монотонного решения при переходе от *n*-мерной к $(n-1)$-мерной задаче.

В [10], где впервые была предложена рассматриваемая арбитражная схема такого решения предложено

DOI:10.21681/2311-3456-2022-1-95-101

не было. В [1, 2, 6-9] существование МС-решения в общем случае обеспечивалась тем, что все множества допустимых распределений «выигрышей» между игроками имели вид множеств с «плоской границей», которые обладали рядом специфических свойств, обеспечивающих, при доказательстве, возможность корректного перехода от n-мерной к $(n-1)$-мерной задаче.

В этой связи, целесообразно в качестве дополнительных условий, накладываемых на множества $A \in \mathcal{M}$, рассмотреть те свойства, которыми обладают множества с «плоской границей».

Рассмотрим произвольные множества $A \subset \mathbb{R}_+^k$, $B \subset \mathbb{R}_+^k$, $k \in N = \{1,\dots,n\}$ и скажем, что $A \tilde{\supset} B$, если: $A \supset B$ и $K(A) \cap K(B) = \varnothing$.

Пусть заданы $A \subset \mathbb{R}_+^n$ и $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Выделим в $\mathbb{R}_+^n$ семейство плоскостей вида $V_i^0(a_i) = \{v = (v_1,\dots,v_n) : v_i = a_i > 0, i \in N\} \subset \mathbb{R}_+^n$. Обозначим $A_I(a_1,\dots,a_k)$, где $I = \{(i_1,\dots,i_k) : i_m, i_l \in N, i_m \neq i_l\}$, проекцию сечения множества A плоскостями вида $V_i^0(a_i)$ на пространство, образованное оставшимися $(n-k)$ оставшимися координатами.

Предположим, что в дополнение к условиям У1-У5 выполнено условие:

У6: если $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ и $B \succeq A$, то для любых $k \in \{1,\dots,n-2\}$, $I = \{(i_1,\dots,i_k) : i_m, i_l \in N, i_m \neq i_l\}$, $(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}_+^k$, $(y_1,\dots,y_k) \in \mathbb{R}_+^k$ таких, что множества $B_I(x_1,\dots,x_k)$ и $A_I(y_1,\dots,y_k)$ не пусты, выполнено одно из следующих соотношений:

а) $B_I(x_1,\dots,x_k) \tilde{\subset} A_I(y_1,\dots,y_k)$;

б) $B_I(x_1,\dots,x_k) \tilde{\supset} A_I(y_1,\dots,y_k)$;

в) $B_I(x_1,\dots,x_k) = A_I(y_1,\dots,y_k)$.

Условие У6, во-первых, обеспечивает сохранение выполнения У1-У5 при переходе от k-мерной к $(k-1)$-мерной задаче, а, во-вторых, при $n = 2$ выполняется автоматически и Утверждение 1 полностью сохраняет свою силу.

Докажем, предварительно, несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$ (для простоты здесь и далее будем полагать, что $p = (1,2,\dots,n)$), числа x и y таковы, что $x \geq y$, и множества $A_i(x)$ и $A_i(y)$, $i \in N$, не пусты, тогда: $A_i(x) \tilde{\supset} A_i(y)$, причем $A_i(x) = A_i(y)$, только в случае, когда $x = y$.

Доказательство. Доказательство легко следует из У1-У4. ■

Лемма 2. Пусть $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ и $B \succeq A$, тогда для любого $\pi(\cdot) \in \mathcal{P}$: $B_i(\pi_i(B)) \sqsupseteq A_i(\pi_i(A))$, $i \in N$.

Доказательство. Предположим противное, тогда существует $k \in N$, такое, что: $B_k(\pi_k(B)) \subset A_k(\pi_k(A))$. Обозначим $\pi^{-k}(\cdot) = (\pi_1(\cdot),\dots,\pi_{k-1}(\cdot),\pi_{k+1}(\cdot),\dots,\pi_n(\cdot))$. Из У4 следует, что $\pi^{-k}(A) \in K(A_k(\pi_k(A))$ и $\pi^{-k}(B) \in K(B_k(\pi_k(B))$ и, поскольку по предположению, $K(B_k(\pi_k(B)) \subset K(A_k(\pi_k(A))$, то в силу У5 существует хотя бы одно $j \in \{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}$ такое, что: $\pi_j(A) > \pi_j(B)$, что противоречит условию леммы $\pi(\cdot) \in \mathcal{P}$. ■

Для любых $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ обозначим $\Delta_{inf}(A,B) = \inf_{x \in B, y \in A} |x-y|$ и $\Delta_{sup}(A,B) = \sup_{y \in A} \Delta_{inf}(y,B)$.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$, $B \in \mathcal{M}_p$ и $B \succeq A$, тогда $B_1(\hat{\pi}_1(B)) \sqsupseteq A_1(\hat{\pi}_1(A))$.

Доказательство. Предположим противное, тогда $B_1(\hat{\pi}_1(B)) \subset A_1(\hat{\pi}_1(A))$, причем $K(B_1(\hat{\pi}_1(B))) \cap K(A_1(\hat{\pi}_1(A))) = \varnothing$, откуда, с учетом У1-У4 имеем:

$$\Delta_{inf}\left(K\left(A_1(\hat{\pi}_1(A))\right), K\left(B_1(\hat{\pi}_1(B))\right)\right) \geq \delta > 0 \quad (3)$$

Далее несложно проверить, что:

1) для любого числа $z > 0$ и переменной h функция $\bar{\Delta}_{sup}(h) = \Delta_{sup}\left(K\left(A_1(z+h)\right), K\left(A_1(z)\right)\right)$ непрерывна по h и $\bar{\Delta}_{sup}(0) = 0$;

2) для $A \in \mathcal{M}_p$, $B \in \mathcal{M}_p$ и $C \in \mathcal{M}_p$ справедливо неравенство:

$$\Delta_{inf}(A,B) \geq \Delta_{inf}(A,C) - \Delta_{sup}(B,C) \quad (4).$$

По определение ОМС-решения $\hat{\pi}(\cdot)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\pi^{\varepsilon}(\cdot) \in \mathcal{P}$ такой, что $\pi_1^{\varepsilon}(B) \geq \hat{\pi}_1(B) - \varepsilon$. Рассмотрим $B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B))$ и $K(B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B)))$. В силу непрерывности $\bar{\Delta}_{sup}(h)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\Delta_{sup}\left(B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B)), K\left(B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B))\right)\right) < \delta/2 \quad (5)$$

Тогда из (3) и (4) имеем: $\Delta_{inf}\left(K\left(A_1(\hat{\pi}_1(A))\right), K\left(B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B))\right)\right) \geq \delta/2$.

Из Леммы 1 и (5) имеем: $B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B)) \subset A_1(\hat{\pi}_1(A))$, откуда следует, что $B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B)) \subset A_1(\pi_1^{\varepsilon}(A))$ причем, из У5-У6 имеем: $K\left(B_1(\pi_1^{\varepsilon}(B))\right) \cap K\left(A_1(\pi_1^{\varepsilon}(A))\right) = \varnothing$, что противоречит утверждению Леммы 2. ■

Перейдем, теперь к доказательствусуществования и единственности ОМС-решения.

Утверждение 3. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$ и выполнены условия У1-У6, тогда ОМС-решение $\hat{\pi}(A) \in A$ существует и единственено.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n. Для $n = 2$ утверждение доказано. Предположим, что утверждение доказано для $n-1 \geq 2$ и докажем его для n. По Утверждению 2 класс $\mathcal{P}$ не пуст, тогда множество $V(A) = \{v = (v_1,\dots,v_n) : v_i = \pi_i(A), i \in N, \pi(A) \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}_+^n$ также не пусто.

Положим: $\hat{\pi}_1(A) = \sup\limits_{\pi(A)\in\mathcal{P}} \pi_1(A)$.

Пусть $A \in \mathcal{M}_p$, $B \in \mathcal{M}_p$ и $B \succeq A$. Покажем, что $\hat{\pi}_1(A)$ монотонно по 1-й координате по отношению $\succeq$. Предположим противное, тогда: $\hat{\pi}_1(A) > \hat{\pi}_1(B)$. По построению для любого $\hat{\pi}_1(B) \le \hat{\pi}_1(B)$ и для любого $\varepsilon > 0$

существует $\pi^{\varepsilon}(\,\cdot\,) \in \mathcal{P}$ такое, что $\pi_1^{\varepsilon}(A) \ge \pi_1(A) - \varepsilon$.

Полагая $\varepsilon = (\hat{\pi}_1(A) - \hat{\pi}_1(B))/2$ получим: $\pi_1^{\varepsilon}(B) < \pi_1^{\varepsilon}(A)$, что противоречит $\pi^{\varepsilon}(A) \in \mathcal{P}$. Таким образом, монотонность по 1-й координате доказана.

Обозначим: $C(A) = A_{\bar{1}}(\hat{\pi}_1(A))$ и рассмотрим класс

$\mathcal{M}(C) = \{C(A) : A \in \mathcal{M}\} \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$. Очевидно, что для $C(A) \in \mathcal{M}(C)$ выполнены условия У1-У4.

Зададим на классе $\mathcal{M}(C)$ частичное упорядочение по отношению $\succeq$ такому, что $C(B) \succeq C(A)$, если и только если $B \succeq A$. Тогда по Лемме 3 имеем: если $C(B) \succeq C(A)$, то $C(B) \sqsupseteq C(A)$ и таким образом для $\mathcal{M}(C)$ и $\succeq$ выполнено У5.

Обозначим $p^{-1} = (p_2, \ldots, p_n)$ некоторую перестановку чисел $\{2, \ldots, n\}$ и положим, что класс $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}_+^k$ разбит на пересекающиеся подклассы $\mathcal{M}_{p^{-1}}(C)$ такие,

что $\mathcal{M}_{p^{-1}}(C) = \{C(A) : A \in \mathcal{M}_p, p = (1, p^{-1})\}$.

На классе $\mathcal{M}(C)$ определим класс монотонных решений $\mathcal{P}(C) = \{\pi(C) = (\pi_2(C), \ldots, \pi_n(C))\}$, удовлетворяющих С1-С3. Тогда по условию класс $\mathcal{P}(C)$ не пуст, а по предположению индукции в этом классе существует единственное ОМС-решение $\hat{\pi}(C) = (\hat{\pi}_2(C), \ldots, \hat{\pi}_n(C))$.

Определим на $\mathcal{P}$ решение $\hat{\pi}(A) = (\hat{\pi}_1(A), \hat{\pi}_2(C), \ldots, \hat{\pi}_n(C))$. Очевидно, что это и есть искомое ОМС-решение, причем оно единственное. ■

Таким образом, в данном разделе нам удалось существенно обобщить рассмотренную в работах [1-10] арбитражную схему, построив ее аналог без использования понятия «заявки» элемента $p = (1, 2, \ldots, n)$, $i \in N$, системы S.

Упорядочивание узлов сети по их рисковому потенциалу

Как было сказано выше, каждую случайную функцию локального риска $\rho_i = \rho_i(\,\cdot\,,\cdot\,)$, $i \in N$, можно рассматривать, как одномерную случайную величину ρ_i, $i \in N$ с функцией распределения F_i, которую мы будем называть *рисковым потенциалом* узла $s_i \in S$, $i \in N$, сети S, и считать, что задано некоторое пространство одномерных вероятностных распределений $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N\}$.

Считая значения случайной величины ρ_i, $i \in N$ значениями функции локального риска (то есть некоторой характеристикой величины потенциального ущерба для узла сети S), представляется достаточно разумным предполагать, что «лучше» то распределение, при котором *меньшие* значения риска (ущерба) реализуются с *большими* вероятностями. А среди функций локального риска, например, с одинаковыми «средними» значениями считать более предпочтительной функцию с более «стабильным» риском, то есть с меньшим «разбросом» его значений, поскольку в этом случае вероятность реализации больших рисков (потерь) ниже. Фактически, речь идет о введении некоторого отношения предпочтения $\succeq$ в пространстве $\mathcal{F}$.

Пусть на $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N\}$ задано некоторое бинарное отношение $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}^2$, которое в свою очередь порождает отношение предпочтения $\succeq$.

Определение 3. Пусть $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{F}$, тогда F_1 «*не хуже*» F_2, если $(F_1, F_2) \in \mathcal{R}$.

Определение 4. Пусть $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{F}$, тогда отношение $\succeq$ будем называть «*исчислимым*», если на $\mathcal{F}$ существует функционал $U(F)$ такой, что $F_1 \succeq F_2$, если и только если $U(F_1) \ge U(F_2)$.

Таким образом, при введении отношения предпочтения $\succeq$ в пространстве $\mathcal{F}$ представляется разумным сравнивать функции распределения из $\mathcal{F}$, основываясь на некоторых характеристиках центра и рассеяния. Выбор таких характеристик, вообще говоря, неоднозначен и простейшими из них являются математическое ожидание и дисперсия (если они существуют). Обозначим m_F, ${}^{2}_{F}$ – соответственно ограниченные математическое ожидание и дисперсию распределения $F \in \mathcal{F}$ и рассмотрим в качестве решающего функционала $U(F)$ некоторую функцию $f(m_F, {}^{2}_{F})$. Функции указанного вида встречаются во многих работах, однако, несмотря на кажущуюся естественность такого критерия, он не удовлетворяет некоторым разумным требованиям, и, следовательно, не является «хорошим» (подробнее, см. [1, 11]).

Перейдем к математической постановке задачи. Сформулируем следующие аксиомы:

А1: если для любых $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{F}$ и $x \in \mathbb{R}^1$ выполнено: $F_1(x) \le F_2(x)$, то $F_1 \succeq F_2$.

А2: если для любых $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{F}$ таких, что $E(F_1) = E(F_2) = m_0$ выполнено: $F_1(x) \le F_2(x)$ при $x \le m_0$ и $F_1(x) \ge F_2(x)$ при $x > m_0$, то $F_1 \succeq F_2$.

Аксиома А1 утверждает, что если имеются две случайные величины, то предпочтение отдается распределению с меньшим центром.

Аксиома А2 утверждает, что если имеется две симметрично распределенные случайные величины с общим центром, то предпочтение отдается распределению с меньшим разбросом.

Естественно, аксиомы А1 и А2 не должны обязательно выполняться в любой модели, хотя они и представляются достаточно разумными. Но если строить модель, исходя из предположений, введенных выше, то необходимость аксиом А1 и А2 представляется достаточно очевидной. В силу этого, в дальнейшем будем полагать, что аксиомы А1 и А2 выполнены.

Рассмотрим в качестве решающего функционала линейный функционал вида: $U(F) = \int u(x) F(dx)$.

Справедливо следующее утверждение (подробнее, см. [1, 11])

Утверждение 4. Пусть $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ и для $x \in \mathbb{R}^1$

выполнено: $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x} > 0$, $\dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} < 0$, тогда аксиомы А1 и А2 выполнены.

DOI:10.21681/2311-3456-2022-1-95-101

Доказательство см., например, в [1, 11].

Утверждение 4 задает условия на функцию $u(x)$, при которых функционал $U(F)=\int u(x)F(dx)$ не вступает в противоречие с аксиомами А1 и А2, и может быть использован в качестве решающего функционала при сравнении функцией распределения F_i из пространства одномерных вероятностных распределений $\mathcal{F}=\{F_i, i\in N\}$.

Рассмотрим, теперь, функционал вида $U(F)=\iint u(x,y)F(dx)F(dy)$, который будем называть *квадратичным функционалом*.

Следующее утверждение отвечает на вопрос об условиях, которым должна удовлетворять функция $u(\cdot,\cdot)$, чтобы выполнялись аксиомы А1 и А2

Утверждение 5. Пусть $u(x,y)\in C^3(\mathbb{R}^2)$ и для $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ выполнено: $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\ge 0$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\ge 0$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}\ge 0$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\le 0$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\le 0$, $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2\partial y}\le 0$, $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x\partial y^2}\le 0$, тогда аксиомы А1 и А2 выполнены.

Доказательство см., например, в [1, 11].

Таким образом, в настоящем разделе показано, что если каждого узла $s_i\in S$, сети S заданы их рисковые потенциалы ρ_i, $i\in N$ с функцией распределения F_i, то они могут быть упорядочены между собой с использованием линейных или квадратичных функционалов, удовлетворяющих аксиомам А1 и А2, что, в свою очередь, открывает возможность использования обобщенной арбитражной схемы, рассмотренной выше. Полученное ОМС-решение может быть использовано для получения эффективного решения задачи (2).

Выводы

В работе рассмотрена общая модель сложной сети, в рамках которой взаимодействуют два субъекта: природа и игрок. Каждый из субъектов осуществляет воздействие на сеть путем распределения имеющегося в его распоряжении ресурса между ее узлами. Для оценки состояния узлов сети используются функции локального риска, удовлетворяющие некоторым заданным требованиям, а для оценки состояния системы в целом – функция интегрального риска. При этом считается, что природа воздействует на узлы случайным образом, а игрок (защитник) пытается снизить локальные риски узлов сети осуществляя в том или ином смысле эффективное распределение ресурса между ними.

В ранних работах авторов предполагалось, что все функции локального риска являются детерминированными, однако информация об их конкретном виде у субъекта управления отсутствует. В этих условиях было показано, что в случае отсутствия взаимного влияния узлов друг на друга для нахождения эффективного распределения ресурса может быть использован теоретико-игровой подход на основе монотонной арбитражной схемы (МС-решение), ключевым элементом которого является возможность иерархического упорядочивания локальных рисков.

В настоящей работе указанный подход обобщается на случай, когда функции локальных рисков отдельных узлов являются, вообще говоря, случайными функциями. Для чего вводится понятие обобщенной арбитражной схемы, основанной на принципах стимуляции и неподавления и доказывается существование и единственность ОМС-решения.

В качестве механизма упорядочивания локальных рисков предложено использовать линейные или квадратичные функционалы специального вида, удовлетворяющих заданным требованиям.

Ометим, что приведенное в Утверждении 3 доказательство существования и единственности ОМС-решения в рамках обобщенной арбитражной схемы, также, как и доказательства аналогичных утверждений о существовании и единственности МС-решения (см., например, в [1, 2]) не является конструктивным. В этой связи, в качестве направлений дальнейших исследований может быть рассмотрен, по аналогии с МС-решением, поиск частных случаев, для которых ОМС-решение может быть представлено в конкретном функциональном виде.

Литература

1. Калашников, А.О. Модели и методы организационного управления информационными рисками корпораций // А.О. Калашников – М.: Эгвес, 2011. – 312 с. – ISBN 978-5-91450-078-5.
2. Калашников, А.О. Организационные механизмы управления информационными рисками корпораций // А.О. Калашников – М.: ПМСОФТ, 2008. – 175 с. – ISBN 978-5-9900281-9-7.
3. Модели управления информационными рисками сложных систем / А.О. Калашников, Е.В. Аникина // Информация и безопасность. – 2020. – Том 23. – № 2(4). – С. 191-202.
4. Management of Risks for Complex Computer Network / A.O. Kalashnikov, E.V. Anikina // Proceedings of the 23rd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2020, Moscow). – Cham: Springer, 2020. – vol 1337. – С. 144-157.
5. Управление информационными рисками сложной системы с использованием механизма "когнитивной игры" / А.О. Калашников, Е.В. Аникина // Вопросы кибербезопасности – 2020. – № 4(38). – С. 2-10.
6. Управление информационными рисками с использованием арбитражных схем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2004. – № 4 (16). – С. 57-61.
7. Арбитражная модель управления информационными рисками организационных систем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 3 (25). – С. 41-45.
8. «Максимально стимулирующее» решение в задаче управления информационными рисками организационных систем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 3(25). – С. 45-51.

9. Анализ частных случаев «максимально стимулирующего» решения в задаче управления информационными рисками организационных систем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 4(26). – С. 53-59.
10. О принципе стимуляции в арбитражной схеме / В.И. Ротарь // Экономика и математические методы – 1984. – т. XVII. в. 4. – С. 751-764.
11. Об одном классе предпочтений в пространстве распределений (учет роста и разброса) / А.О. Калашников, В.И. Ротарь // Модели и методы стохастической оптимизации. – М.: ЦЭМИ. – 1983. – С. 77-89.

MANAGEMENT OF RISKS FOR COMPLEX NETWORK BASED ON AN ARBITRATION MODEL

Kalashnikov A.O.[3], Anikina E.V.[4]

Abstract

Purpose of the article: *build risk management frameworks in a complex network under uncertainty when the local risk functions of network nodes are random.*

Research method: *a generalized game-theoretic approach based on a generalized arbitrage scheme (the most stimulating solution), the key element of which is the possibility of hierarchical ordering of network nodes in accordance with the values of their local risks, when the local risk functions of nodes are random. At the same time for ordering local risks, it is proposed to use linear or quadratic functionals of a special type that meet the specified requirements.*

The result: *In this paper considers a general model of a complex network in which two subjects interact: nature and the defender. Within the framework of the model, each of the subjects affects the network by distributing the available resource between its nodes. Local risk functions, meeting some specified requirements, are applied for estimation of the state of network nodes.*

At the same time, it is believed that nature distributes the available resource and thus affects the nodes randomly, and the defender tries to reduce the local risks of the system elements by implementing, in one sense or another, an effective distribution of the resource between them.

Keywords: *local risk, generalized arbitration scheme, maximum stimulating solution, linear functional, quadratic functional.*

References

1. Kalashnikov, A.O. Modeli i metody’ organizacionnogo upravleniya informacionny’mi riskami korporacij // A.O. Kalashnikov – M.: E’gves, 2011. – 312 s. – ISBN 978-5-91450-078-5.
2. Kalashnikov, A.O. Organizacionny’e mexanizmy’ upravleniya informacionny’mi riskami korporacij // A.O. Kalashnikov – M.: PMSOFT, 2008. – 175 s. – ISBN 978-5-9900281-9-7.
3. Modeli upravleniya informacionny’mi riskami slozhny’x sistem / A.O. Kalashnikov, E.V. Anikina // Informaciya i bezopasnost’. – 2020. – Tom 23. – № 2(4). – S. 191-202.
4. Management of Risks for Complex Computer Network / A.O. Kalashnikov, E.V. Anikina // Proceedings of the 23rd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2020, Moscow). – Cham: Springer, 2020. – vol 1337. – S. 144-157.
5. Upravlenie informacionny’mi riskami slozhnoj sistemy’ s ispol’zovaniem mexanizma “kognitivnoj igry’” / A.O. Kalashnikov, E.V. Anikina // Voprosy’ kiberbezopasnosti – 2020. – № 4(38). – S. 2-10.
6. Upravlenie informacionny’mi riskami s ispol’zovaniem arbitrazhny’x sxem / A.O. Kalashnikov // Sistemy’ upravleniya i informacionny’e texnologii. – 2004. – № 4 (16). – S. 57-61.
7. Arbitrazhnaya model’ upravleniya informacionny’mi riskami organizacionny’x sistem / A.O. Kalashnikov // Sistemy’ upravleniya i informacionny’e texnologii. – 2006. – № 3 (25). – S. 41-45.
8. «Maksimal’no stimuliruyushhee» reshenie v zadache upravleniya informacionny’mi riskami organizacionny’x sistem / A.O. Kalashnikov // Sistemy’ upravleniya i informacionny’e texnologii. – 2006. – № 3(25). – S. 45-51.
9. Analiz chastny’x sluchaev «maksimal’no stimuliruyushhego» resheniya v zadache upravleniya informacionny’mi riskami organizacionny’x sistem / A.O. Kalashnikov // Sistemy’ upravleniya i informacionny’e texnologii. – 2006. – № 4(26). – S. 53-59.
10. O principe stimulyacii v arbitrazhnoj sxeme / V.I. Rotar’ // E’konomika i matematicheskie metody’ – 1984. – t. XVII. v. 4. – S. 751-764.
11. Ob odnom klasse predpochtenij v prostranstve raspredelenij (uchet rosta i razbrosa) / A.O. Kalashnikov, V.I. Rotar’ // Modeli i metody’ stoxasticheskoj optimizacii. – M.: CE’MI. – 1983. – S. 77-89.

3 Andrey O. Kalashnikov, Dr.Sc., Chief Researcher of the Institute of Control Problems named after V.A. Trapeznikov of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. E-mail: aokalash@ipu.ru

4 Evgeniya V. Anikina, Researcher at the Institute of Control Problems named after V.A. Trapeznikov of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. E-mail: janet0584@mail.ru