ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ОДНОКУБИТНЫХ ОПЕРАЦИЙ МЕТОДОМ РАНДОМИЗИРОВАННОГО БЕНЧМАРКИНГА

Бантыш Б. И.[1], Заливако И. В.[2], Колачевский Н. Н.[3], Федоров А. К.[4]

DOI: 10.21681/2311-3456-2025-3-105-109

Цель исследования: *определить эффективный и устойчивый к ошибкам метод оценки достоверности однокубитных квантовых операций, сформулировать и экспериментально реализовать алгоритм определения средней точности однокубитного квантового преобразования.*

Методы исследования: *теория зашумленных квантовых операций; рандомизация однокубитных квантовых схем, составленных из преобразований группы Клиффорда; теория унитарного 2-дизайна; экспериментальная апробация на квантовом вычислителе на базе ионов иттербия-171 в ловушке.*

Результаты исследования: *описан алгоритм оценки средней достоверности однокубитных операций и её статистической погрешности; экспериментальная апробация показала корректность модели экспоненциального спада вероятности получить целевое состояние при измерении с увеличением глубины квантовой схемы; результирующая экспериментальная средняя достоверность однокубитной квантовой операции равняется 99.94%.*

Научная новизна: *применение метода рандомизированного бенчмаркинга для определения средней достоверности однокубитных квантовых операций в квантовых вычислениях, в частности, для ионного квантового процессора на базе ионов иттербия-171.*

Ключевые слова: *квантовые вычисления, кубиты, ионы, однокубитные операции.*

Введение

Вычислительные возможности цифровых квантовых устройств определяются как количеством кубитов (элементарных информационных единиц в квантовом случае), так и точностью операций [1]. При этом даже в случае элементарных однокубитных операций определение точности (достоверности) требует специальных процедур [2–6]. Благодаря своей простоте и устойчивости к ошибкам приготовления и измерения одним из лидирующих подходов является определение достоверности однокубитной операции с помощью процедуры рандомизированного бенчмаркинга (randomized benchmarking) [2]. В настоящей работе мы детально описываем данный подход и представляем результаты его применения для определения достоверности однокубитных операций в ионном квантовом процессоре на базе ионов иттербия-171: полученная средняя точность клиффордовской однокубитной операции равняется F = (99,944±0,002) %.

Рандомизированный бенчмаркинг

Процедура однокубитного рандомизированного бенчмаркинга представляет собой измерение случайных однокубитных квантовых схем, состоящих из 24 элементов однокубитной группы Клиффорда [2]. Поскольку группа Клиффорда обладает свойством 2-дизайна, в результате усреднения по случайным квантовым схемам каждый неидеальный случайный гейт эффективно ведёт себя как деполяризующий канал $E\gamma(\rho) = \gamma\rho + (1 - \gamma)\, I/2$, где γ – параметр канала, ρ – произвольная входная матрица плотности, а $I/2$ описывает полностью смешанное состояние кубита. Средняя достоверность клиффордовской операции при этом связана с параметром γ канала по формуле

$$F = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2})\gamma = \frac{1+\gamma}{2}. \quad (1)$$

Для измерения параметра γ случайные схемы генерируются для различных глубин d. В конец каждой схемы добавляется специальный гейт таким образом, чтобы результат измерения в вычислительном базисе в идеальном случае всегда равнялся наперёд заданному значению («0» или «1»). Тогда можно показать, что для неидеальных гейтов вероятность получения целевого ответа есть

$$p(d) = A\gamma^d + B. \quad (2)$$

Параметры A и B зависят от величины ошибок приготовления и измерения. Таким образом, процедура рандомизированного бенчмаркинга заключается в экспериментальном измерении величины $\hat{p}$ для некоторого набора глубин d, аппроксимации

1 Бантыш Борис Игоревич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИТУ «МИСИС», Москва, Россия. E-mail: bbantysh60000@gmail.com
2 Заливако Илья Владимирович, кандидат физико-математических наук, высококвалифицированный научный сотрудник ФИАН им. П. Н. Лебедева, Москва, Россия. E-mail: zalivakoiv@lebedev.ru
3 Колачевский Николай Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, директор ФИАН им. П. Н. Лебедева, Москв, Россия. E-mail: kolachevsky@lebedev.ru
4 Федоров Алексей Константинович, директор Института физики и квантовой инженерии НИТУ «МИСИС», Москва, Россия. E-mail: lex1026@gmail.com

полученных значений функцией (2), и расчёта средней достоверности $\hat{F}$ клиффордовской операции по полученному значению $\hat{\gamma}$.

Однокубитная группа Клиффорда

Однокубитная группа Клиффорда содержит 24 унитарных операции, включая единичную. Любая однокубитная унитарная матрица может быть представлена в виде следующего разложения:

$$U = Z(c)X(b)Z(a), \quad (3)$$

где $a,b,c = [0,2\pi)$ – независимые параметры,

$$X(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & -i\sin\varphi/2 \\ -i\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

соответствует вращению вокруг оси x на угол φ,

$$Z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

соответствует вращению вокруг оси z на угол φ. В таблице 1 приведён список всех 24 преобразований группы Клиффорда и соответствующие параметры разложения (3). Такое разложение не является обязательным. При выполнении преобразований на физическом устройстве допускается произвольное разложение, реализующее заданную унитарную матрицу, однако разложение по формуле (3) минимизирует число физических операций на ионном квантовом вычислителе, так как преобразование $Z(\varphi)$ может быть выполнено виртуально со 100 % точностью.

Выбор целевого состояния

В результате выполнения случайной квантовой схемы может получиться одно из следующих 6 состояний:

$$|\varphi_1\rangle = |0\rangle,\ |\varphi_2\rangle = |1\rangle,\ |\varphi_3\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|\varphi_4\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}},\ |\varphi_5\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}},\ |\varphi_6\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

В конец такой схемы необходимо добавить одно из преобразований из таблицы 1, чтобы привести состояние к целевому. В таблице 2 приведен возможный список таких преобразований.

Для каждого значения глубины схемы d рекомендуется в половине случаев выбирать целевое состояние $|0\rangle$, а в другой половине – целевое состояние $|1\rangle$. Это позволяет зафиксировать константу $B = 1/2$ в формуле (2), что повышает точность оценки $\hat{F}$ [7].

Выбор количества измерений

Пусть M_d есть число случайных схем для глубины d, а $N \geq M_d$ – общее число измерений для каждого d. Рекомендуется брать как можно более высокие значения данных параметров. В условиях, когда переключение к новой схеме требует относительно длительного времени, допускается брать меньшее значение M_d, но не менее 30. Число повторений каждой случайной схемы есть $n = [N/M_d]$. Остаток от деления распределяется поровну между произвольными

Таблица 1.

Список однокубитных преобразований из группы Клиффорда и соответствующие параметры разложения (3) с точностью до глобальной фазы

Преобразование	Матрица	a	b	c
U_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	0	π	0
U_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix}$	3π/2	π/2	0
U_3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	0	0	0
U_4	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$	π/2	π/2	0
U_5	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$	0	π/2	π/2
U_6	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$	π	π/2	π/2
U_7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$	3π/2	π	0
U_8	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	3π/2	π/2	π/2
U_9	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	π/2	0	0
U_{10}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	π/2	π/2	π/2
U_{11}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$	0	π/2	π
U_{12}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$	π	π/2	π
U_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	π	π	0
U_{14}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$	3π/2	π/2	π
U_{15}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	π	0	0
U_{16}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$	π/2	π/2	π
U_{17}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$	0	π/2	3π/2
U_{18}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$	π	π/2	3π/2
U_{19}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	π/2	π	0
U_{20}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	3π/2	π/2	3π/2
U_{21}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	3π/2	0	0
U_{22}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	π/2	π/2	3π/2
U_{23}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	0	π/2	0
U_{24}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$	π	π/2	0

Таблица 2.

Преобразования для приведения выходного состояния случайной схемы к целевому

Выходное состояние случайной схемы	$\|\varphi_1\rangle$	$\|\varphi_2\rangle$	$\|\varphi_3\rangle$	$\|\varphi_4\rangle$	$\|\varphi_5\rangle$	$\|\varphi_6\rangle$
Преобразование для приведения к состоянию $\|0\rangle$	U_3	U_1	U_4	U_2	U_5	U_6
Преобразование для приведения к состоянию $\|1\rangle$	U_1	U_3	U_2	U_4	U_6	U_5

$N \bmod M_d$ схемами. Каждая схема реализуется в двух версиях: когда целевыми состояниями являются $|0\rangle$ или $|1\rangle$. На каждую из них приходится по $[n/2]$ повторений. Остаток от деления поочередно присваивается первой или второй версии схемы. Рекомендуется брать общее число измерений N не менее 1000.

При фиксированном максимальном числе M_{max} случайных схем для каждой глубины следует обратить внимание на следующее. При $M_{max} \geq 24^d$, вместо случайного выбора схем можно перебрать все комбинации из 24 гейтов. Для таких значений глубин требуется меньшее число квантовых схем. Если $24^{d-1} \leq M_{max} < 24^d$, для повышения точности усреднения рекомендуется сэмплировать случайные схемы без возвращения. При $M_{max} < 24^{d-1}$ квантовые схемы сэмплируются независимо с возвращением.

Число различных значений d рекомендуется выбирать не менее 10, однако для повышения качества определения достоверности следует брать больше значений до полного затухания экспоненциальной зависимости до 1/2. Дальнейшее повышение d не даёт повышения точности и не рекомендуется.

Оценка погрешности

Поскольку процедура бенчмаркинга включает в себя множество различных измерений, рекомендуется выполнять оценку погрешности определения достоверности посредством бутстрэпинга (bootstrapping) данных. Пусть R есть объём ресэмплинга (resampling), k – количество наблюдений целевого состояния в некоторой квантовой схеме, которая была измерена n раз. Тогда для данной схемы независимо генерируется R случайных величин $k_1, \ldots, k_R$ из биномиального распределения с вероятностью успеха k/n и числом испытаний n. Данная процедура выполняется для каждой измеренной квантовой схемы. Это позволяет построить R зависимостей вероятности успеха от глубины схемы, из которых затем определяется R значений достоверности $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_R$. Тогда оценка достоверности есть $\hat{F} = \langle \hat{F}_i \rangle \pm 3\sigma_F$, где

$$\langle \hat{F}_i \rangle = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{R} \hat{F}_i, \ \sigma_F = \frac{1}{R} \sqrt{\sum_{i=1}^{R} (\hat{F}_i - \langle \hat{F}_i \rangle)^2}. \qquad (6)$$

Описанная процедура не требует дополнительных измерений и позволяет учесть особенности статистического распределения достоверности по отношению к дробовому шуму (она, однако, не учитывает особенностей случайного сэмплинга квантовых схем). Рекомендуется выбирать объём ресэмплинга R не менее 200.

Описание алгоритма

Входные параметры:

- $\{d\}$ – набор значений глубины квантовой схемы;
- M_{max} – максимальное число случайных схем на каждое d;
- $N \geq M_{max}$ – общее число измерений на каждое d;
- R – объём ресэмплинга.

Выходные значения:

- $\hat{F}$ – оценка достоверности последовательности двух $\pi/2$-импульсов.

Последовательность действий:

1. Задать R пустых наборов $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_R = \{\}$.
2. Для каждого d:

 2.1. Задать $k_1 = \cdots = k_R = 0$.

 2.2. Если $M_{max} \geq 24^d$, сгенерировать набор квантовых схем $\{C\}$, состоящий из всех 24^d комбинаций преобразований из Таблицы 1 длины d. Если $24^{d-1} \leq M_{max} < 24^d$, сгенерировать набор из M_{max} случайных квантовых схем $\{C\}$, где каждая схема выбирается без возвращения из набора их всех 24^d комбинаций преобразований из Таблицы 1 длины d. Если $M_{max} < 24^{d-1}$, сгенерировать набор из M_{max} случайных квантовых схем $\{C\}$ глубины d, где каждое из d преобразований выбирается независимо и равномерно из Таблицы 1.

 2.3. Задать $j = 0$.

 2.4. Задать $zero\_has\_more\_shots = 1$.

 2.5. Для каждого C из $\{C\}$:

  2.5.1. $j \longrightarrow j + 1$.

  2.5.2. Задать $n \longrightarrow N/|C|$

  2.5.3. $n \longrightarrow n + 1$, если $j \leq N \bmod |C|$.

  2.5.4. Если n – чётное число: задать $n_0 = n_1 = n/2$.

  2.5.5. Если n – нечётное число: $n_0 = (n+1)/2$, если $zero\_has\_more\_shots = 1$ и $n_0 = (n-1)/2$ в противном случае; $n_1 = n - n_0$; $zero\_has\_more\_shots \longrightarrow 1 - zero\_has\_more\_shots$.

  2.5.6. Рассчитать выходное состояние $|\varphi\rangle$ схемы C, используя эмулятор идеального квантового процессора.

  2.5.7. Составить квантовую схему C_0 путём добавления к C преобразования, которое задаст целевое состояние $|0\rangle$ (см. табл. 2). Запустить схему C_0 на квантовом процессоре n_0 раз, получить число k_0 результатов измерения «0»*.

2.5.8. Составить квантовую схему C_1 путём добавления к C преобразования, которое задаст целевое состояние $|1\rangle$ (см. Таблицу 2). Запустить схему C_1 на квантовом процессоре n_1 раз, получить число k_1 результатов измерения «1»*.

2.5.9. Для каждого $i = 1, \ldots, R$:

2.5.9.1. Разыграть биномиальную случайную величину k_{i0} с вероятностью успеха k_0/n_0 и числом повторений n_0.

2.5.9.2. Разыграть биномиальную случайную величину k_{i1} с вероятностью успеха k_1/n_1 и числом повторений n_1.

2.5.9.3. $k_i \longrightarrow k_i + k_{i0} + k_{i1}$.

2.6. Для каждого $i = 1, \ldots, R$: добавить к набору $\hat{p}_i$ значение k_i/N.

3. Для каждого $i = 1, \ldots, R$:

3.1. Используя метод наименьших квадратов, определить коэффициенты $\hat{A}_i$ и $\hat{\gamma}_i$, которые наилучшим образом приближают зависимость $p(d) = A\gamma^d + 1/2$ к полученному набору значений $\hat{p}_i$.

3.2. Задать $\hat{F}_i = 1/2 + (1 - 1/2)\ \hat{\gamma}_i$.

4. Вычислить среднее арифметическое $\langle\hat{F}_i\rangle$ и среднеквадратичное отклонение σ_F по формуле (4).

5. $\hat{F}_i = \langle\hat{F}_i\rangle \pm 3\sigma_F$.

* При запуске квантовых схем на квантовом процессоре каждый отдельный гейт квантовой схемы раскладывается на нативные операции процессора. Объединение отдельных квантовых гейтов и последующее разложение не допускается.

Описание эксперимента

В качестве примера реализации данного алгоритма был проведен эксперимент с использованием ионного квантового вычислителя. В его основе лежит линейная ионная ловушка, в которой захвачено 10 ионов иттербия-171 [8]. Перед каждым экспериментальным циклом ионы подвергались доплеровскому лазерному охлаждению [9] до температуры порядка 1 мК. После этого все ионы методом оптической накачки подготавливались в состояние $|0\rangle=|^2S_{1/2}(F = 0, m_F = 0)$. Далее к ионам прикладывалась заданная цепочка операций при помощи микроволнового поля на частоте 12,6 ГГц, которое связывает кубитные уровни $|1\rangle$ и $|0\rangle=|^2S_{1/2}(F = 1, m_F = 0)$. Операции типа X(b), заданные матрицей (4), производятся путем приложения микроволновых импульсов при помощи антенны, резонансных с переходом $|0\rangle \longrightarrow |1\rangle$. Угол поворота b задается длительностью импульса. Операция $Z(a)$ является виртуальной [10] и производится путем сдвига фазы всех последующих за ней микроволновых импульсов на a. После выполнения всех операций в цепочке производится считывание квантового состояния кубитов. Считывание производится методом квантовых скачков [9].

Результаты и выводы

Алгоритм рандомизированного бенчмаркинга был применён к анализу средней достоверности однокубитного квантового преобразования, выполняемого на ионном квантовом вычислителе на одном из ионов в регистре. При этом использовалось разложение преобразований группы Клиффорда из таблицы 2. Ввиду изначально высокой точности гейта использовалась логарифмическая сетка значений глубины d. Максимальное число квантовых схем на каждую глубину $M_{max} = 100$, число измерений на каждую глубину $N = 20000$, объём ресэмплинга для оценки статистической погрешности $R = 500$. Как видно из рисунка 1, экспериментальные точки хорошо описываются теоретической экспоненциальной функцией. Небольшие отличия можно объяснить конечной выборкой случайных клиффордовских схем. Полученная средняя точность клиффордовской однокубитной операции равняется $F = (99.944 \pm 0.002)$ %.

Таким образом, детально описан метод для определения точности однокубитных операций, а также представлены результаты его применения для ионного квантового процессора.

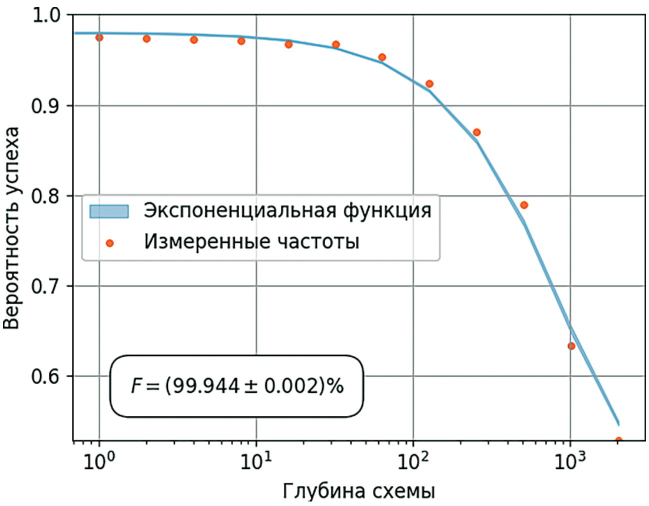

Рис. 1. Зависимость вероятности успеха (получения целевого состояния при измерении) от глубины однокубитной квантовой схемы. Показаны экспериментально измеренные вероятности и приближение точек экспоненциальной функцией p(d) = Aγ^d + 1/2. Закрашенная область отображает доверительный интервал (1-й и 99-й процентили) функции для различных реализаций ресэмплинга.

Статья подготовлена по гранту № К1-2022-027 программы «Приоритет 2030».

Литература

1. Федоров, А.К. Вычислимое и невычислимое в квантовом мире: утверждения и гипотезы / А.К. Федоров, Е.О. Киктенко, Н.Н. Колачевский // Успехи физических наук. – 2024. – Т. 194, № 9. – С. 960-966. – DOI 10.3367/UFNr.2024.07.039721.
2. Randomized Benchmarking of Quantum Gates / E. Knill, D. Leibfried, R. Reichle, et al. // Physical Review A. 2008. № 77(1). С. 012307. DOI 10.1103/PhysRevA.77.012307.
3. Gate Set Tomography / E. Nielsen, J.K. Gamble, K. Rudinger, et al. // Quantum. 2021. № 5. С. 557. DOI 10.22331/q-2021-10-05-557.
4. Levy R., Luo D., Clark B.K. Classical shadows for quantum process tomography on near-term quantum computers // Physical Review Research. 2024. Vol. 6. Iss. 1. P. 013029. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.013029
5. Non-Markovian quantum process tomography / G.A.L. White, F.A. Pollock, L.C.L. Hollenberg et al. // PRX Quantum. 2022. Vol. 3. Iss. 2. С. 020344. DOI: 10.1103/PRXQuantum.3.020344.
6. Variational quantum process tomography of unitaries / S. Xue, Y. Liu, Y. Wang et al. // Physical Review A. 2022. Vol. 105. Iss. 3. С. 032427. DOI: 10.1103/PhysRevA.105.032427.
7. Statistical analysis of randomized benchmarking / R. Harper, I. Hincks, C. Ferrie, et al. // Physical Review A. 2019. Vol. 99. Iss. 5. P. 052350. DOI 10.1103/PhysRevA.99.052350.
8. Realizing quantum gates with optically addressable Yb+ 171 ion qudits / M.A. Aksenov, I.V. Zalivako, I.A. Semerikov et al. // Physical Review A. 2023. Vol. 107. Iss. 5. – С. 052612. DOI: 10.1103/PhysRevA.107.052612.
9. Ejtemaee S., Thomas R., Haljan P.C. Optimization of Yb+ fluorescence and hyperfine-qubit detection // Physical Review A. 2010. № 82(6). С. 063419. DOI: 10.1103/PhysRevA.82.063419.
10. Efficient Z gates for quantum computing / D.C. McKay, C.J. Wood, S. Sheldon et al. // Physical Review A. 2017. № 96(2). С. 022330. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.022330.

DETERMINING THE FIDELITY OF SINGLE-QUBIT OPERATIONS USING RANDOMIZED BENCHMARKING

Bantysh B.I.[5], Zalivako I.V.[6], Kolachevsky N.N.[7], Fedorov A.K.[8]

Keywords: *quantum computing, qubits, ions, single-qubit operations.*

The purpose of the research: *to determine an efficient and error-resilient method for assessing the fidelity of single-qubit quantum operations, as well as to formulate and experimentally implement an algorithm for determining the average accuracy of single-qubit quantum transformations*

Research methods: *the theory of noisy quantum operations, randomization of single-qubit quantum circuits composed of Clifford group transformations, the theory of unitary 2-design, experimental validation on a quantum computer based on ytterbium-171 trapped ions*

Research results: *an algorithm for estimating the average fidelity of single-qubit operations and its statistical error is described; experimental validation confirmed the correctness of the exponential decay model of the probability of obtaining the target state during measurement as the depth of the quantum circuit increases; the resulting experimental average fidelity of the single-qubit quantum operation is 99.94%*

Scientific novelty: *the application of the randomized benchmarking method to determine the average fidelity of single-qubit quantum operations in quantum computing, particularly for an ion-based quantum processor with ytterbium-171 ions.*

References

1. Fedorov, A.K. Vychislimoe i nevychislimoe v kvantovom mire: utverzhdenija i gipotezy / A.K. Fedorov, E.O. Kiktenko, N.N. Kolachevskij // Uspehi fizicheskih nauk. – 2024. – T. 194, № 9. – S. 960–966. – DOI 10.3367/UFNr.2024.07.039721.
2. Randomized Benchmarking of Quantum Gates / E. Knill, D. Leibfried, R. Reichle, et al. // Physical Review A. 2008. № 77(1). S. 012307. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.012307.
3. Gate Set Tomography / E. Nielsen, J.K. Gamble, K. Rudinger, et al. // Quantum. 2021. № 5. S. 557. DOI 10.22331/q-2021-10-05-557.
4. Levy R., Luo D., Clark B.K. Classical shadows for quantum process tomography on near-term quantum computers // Physical Review Research. 2024. Vol. 6. Iss.1. P. 013029. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.013029.
5. Non-Markovian quantum process tomography / G.A.L. White, F.A. Pollock, L.C.L. Hollenberg et al. // PRX Quantum. 2022. Vol.3. Iss. 2. S. 020344. DOI: 10.1103/PRXQuantum.3.020344.
6. Variational quantum process tomography of unitaries / S. Xue, Y. Liu, Y. Wang et al. // Physical Review A. 2022. Vol. 105. Iss. 3. S. 032427. DOI: 10.1103/PhysRevA.105.032427.
7. Statistical analysis of randomized benchmarking / R. Harper, I. Hincks, C. Ferrie, et al. // Physical Review A. 2019. Vol. 99. Iss. 5. P. 052350. DOI 10.1103/PhysRevA.99.052350.
8. Realizing quantum gates with optically addressable Yb+ 171 ion qudits / M. A. Aksenov, I. V. Zalivako, I. A. Semerikov et al. // Physical Review A. 2023. Vol. 107. Iss. 5. – S. 052612. DOI: 10.1103/PhysRevA.107.052612.
9. Ejtemaee S., Thomas R., Haljan P.C. Optimization of Yb+ fluorescence and hyperfine-qubit detection // Physical Review A. 2010. № 82(6). S. 063419. DOI: 10.1103/PhysRevA.82.063419.
10. Efficient Z gates for quantum computing / D.C. McKay, C.J. Wood, S. Sheldon et al. // Physical Review A. 2017. № 96(2). S. 022330. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.022330.

5 Boris I. Bantysh, PhD, National University of Science and Technology «MISIS», e-mail: bbantysh60000@gmail.com

6 Ilya V. Zalivako, PhD, P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, e-mail: zalikes@yandex.ru

7 Nikolay N. Kolachevsky, Dr.Sc., professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, e-mail: kolachevsky@lebedev.ru

8 Aleksey K. Fedorov, PhD, National University of Science and Technology «MISIS», e-mail: lex1026@gmail.com