

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИ КЛАССИФИКАЦИИ ИНФОРМАЦИИ

Гордеев Э. Н.¹, Леонтьев В. К.²

DOI: 10.21681/2311-3456-2025-5-128-138

Скончался выдающийся математик, соавтор данной статьи, доктор физико-математических наук, профессор Владимир Константинович Леонтьев.

Владимир Константинович ушел из жизни 22 июля 2025 года в возрасте 83 лет.

Всю жизнь он посвятил развитию дискретного анализа и теории информации, его исследования в области кодирования и дискретной оптимизации получили мировое признание. Профессор Леонтьев разработал новые границы в задачах о покрытии, решил проблему совершенных кодов и создал оптимальные коды, обнаруживающие ошибки. В теории задач дискретной математики им построена теория устойчивости решений и табулирования в дискретных оптимальных задачах на основе понятия «радиус устойчивости».

Как педагог воспитал множество талантливых математиков, преподавал в МФТИ, МГУ, МГТУ. Среди учеников Владимира Константиновича – 16 кандидатов и 2 доктора наук.

Светлая и благодарная память о Владимире Константиновиче Леонтьеве навсегда останется в истории отечественной науки.

Цель данной работы: проанализировать возможности применения теории графов для кодирования и классификации изображений, что особенно актуально в связи с использованием методов искусственно интеллекта для классификации изображений.

Метод исследования: комбинаторика и теория графов, а также эвристические алгоритмы.

Полученные результаты: в работе обсуждается возможность применения классических результатов теории графов, касающихся проблем восстановления и распознавания графов и их характеристик, в области распознавания изображений. При этом анализируются различные аспекты задачи описания (представления) графов с помощью их инвариантов.

Вводятся и рассматриваются новые классы инвариантов для графов, которые, в частности, могут использоваться для анализа и классификации изображений. Кроме того, доказанные в статье утверждения касаются таких аспектов проблемы как формирование сложных типов инвариантов на основе базисных и нахождение функциональных зависимостей одних инвариантов от других.

Научная новизна: построены и обоснованы новые составные инварианты графов, которые можно эффективно использовать при распознавании изображений, представленных на основе графов.

Ключевые слова: распознавание, признаковые таблицы, эвристики, восстановление, инвариант графа, хроматическое число, число независимости, число внешней устойчивости, число внутренней устойчивости.

Введение. Признаковое распознавание и графы

В работе рассматриваются вопросы, использующие язык теории графов, которые могут иметь разные прикладные аспекты, в том числе, в области распознавания изображений. В качестве модельной иллюстрации прикладная задача, к которой относятся теоретические рассуждения, представленные в этой работе, могут быть описана следующим образом.

Дано некоторое множество изображений (представлений) одного и того же объекта $I_1, \dots, I_m$, полученных с помощью средств $T_1, \dots, T_m$. Мы хотим определить, какие из выбранных средств предпочтительнее.

Можно посмотреть и по-другому. Дано множество изображений одного объекта, в сочетании с изображениями других объектов. Требуется исключить из данного множества эти последние, быть может, исключив и часть изображений рассматриваемого объекта.

Например, имеются фотоснимки объекта той или иной степени четкости. Их надо как-то «предобработать» для хранения и передачи, сообразуясь с теми правилами, согласно которым это хранение и эта передача осуществляются. Так как в любом случае на вход вычислительного алгоритма подается слово

¹ Гордеев Эдуард Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры ИУ-8 «Информационная безопасность» МГТУ им. Н. Э. Баумана. Москва, Россия. E-mail: werhorn@yandex.ru

² Леонтьев Владимир Константинович, доктор физико-математических наук, профессор. Москва, Россия. E-mail: vkleontiev@yandex.ru

в конечном алфавите, то под «предобработкой» понимается представление объекта в виде такого слова (создание по объекту его кода). Но при этом важно выбрать такие методы предобработки, которые бы учитывали специфику изображения.

В этом случае предобработка может заключаться в определенной классификации частей изображения и некоторых преобразованиях над ними с целью получения таблицы признаков значений $W = (w_{ij})$ размеров $m \times n$, где $P_1, \dots, P_n$ – множество признаков, содержащей признаковые описания изображений $I_1, \dots, I_m$.

При этом, применяя разные способы предобработки, мы можем подучить несколько различных таких таблиц, каждая из которых несет определенную информацию о распознаваемом объекте. Можно считать, что каждая из отдельных таблиц является некоторым «фрагментом» основной матрицы изображения, несущей наибольшую информацию об исходном объекте, которую, естественно, и легче классифицировать.

Таким образом, в этом случае задача распознавания изображения может быть сформулирована как задача составления признаковой таблицы изображений изображения (первый этап) с последующей классификацией изображений (второй этап).

Признаковые таблицы на основе графов

Можно привести многочисленные примеры использования графов для составления признаков таблиц при распознавании изображений.

Пример 1.

Сама предметная область, к которой относится изображение естественным образом представима в виде графа. Например, сеть автодорог, географические и спутниковые карты местности с реками, дорогами, населенными пунктами и пр. В поисковых системах или системах типа «антиплагиат», где требуется просматривать тексты со схемами и чертежами, также могут возникать анализируемые изображения, основная информация о которых может быть представлена путем выделения группы объектов и указанием на их попарные связи.

В этом случае строки признаковой таблицы соответствуют изображениям, представленным графами, а признаками могут служить характеристики графов, имеющие числовые значения: числа вершин, ребер, компонент связности, значения хроматического числа, числа внешней устойчивости и пр.

Пример 2.

Но графы естественным образом сопоставляются и произвольному изображению. Для простоты рассмотрим черно-белый случай.

На этапе «предобработки» с помощью графов можно построить эвристические процедуры, учитывающие

особенности соседства черных и белых областей, их кривизну, размеры и т.д.

Рассмотрим плоское изображение I . Его граница $D(I)$ ограничивает область $W(I)$ на плоскости с фиксированной ориентацией. Для простоты берется черно-белый случай. Через $G(I) = G(A, X)$ обозначим граф, сопоставляемый в каждом примере изображению (черно-белой области) I , со множеством вершин A и множеством ребер X . Так как затем графы будут использоваться в эвристических алгоритмах анализа изображений, то отметим следующие факторы.

1. Мы не требуем, чтобы по графу изображение восстанавливалось однозначно.
2. Граф должен по изображению строиться однозначно и отражать определенные свойства изображения.
3. Предполагается наличие масштабируемости. Например, если одно и то же изображение представлено двумя фотографиями разных размеров с одинаковой ориентацией и без искажений по направлениям осей, то алгоритм сопоставления должен дать одинаковые результаты.

Ниже приведены примеры эвристических алгоритмов для сопоставления графов изображениям, которые отвечают вышеприведенным требованиям.

На самом деле, каждый из этих подходов содержит вариативность как по введенным параметрам, так и по некоторым правилам, используемым при построении графа по изображению (соседству вершин, «цвету», площадям подобластей и пр.).

Сеть правильных многоугольников

Фиксируем параметры: k (натуральное число), d и q ($0 < q < 1$). Первый задает число вершин правильного многоугольника, а второй – его диаметр. Обозначим такой многоугольник через $M(k, d)$. Вписываем $W(I)$ в прямоугольник $P(I)$ с той же самой ориентацией. Строим покрытие $P(I)$ сетью многоугольников $M(k, d)$. При определенных дополнениях к эвристике его можно построить однозначно. Из построенной сети выбрасываем те многоугольники (граничные), площадь пересечения которых с $W(I)$ меньше половины площади $M(k, d)$. Получим сеть $S(I, k, d)$.

Каждой ячейке сопоставим вершину графа $G(A, X)$. Цветом ячейки назовем черный цвет, если часть площади ячейки, им занятая, превосходит q . В противном случае ее цвет белый.

Варируя параметры и правила построения ребер (соединение соседних ячеек одного цвета, разных цветов и т.п.) получаются графы, в определенной степени характеризующие изображение.

Полученные графы степени не более k являются плоскими. По укладке на плоскости можно построить изображение (с точностью до разницы негатив-позитив).

По нему, конечно, нельзя восстановить изображение. Но при увеличении k полученное по графу изображение будет все больше приближаться к оригиналу.

Соотношение цветов

Черно белую область $W(I)$ можно представить как объединение черной $W_b(I)$ и белой $W_w(I)$ частей. Каждую из них можно представить как объединение некоторого множества замкнутых областей.

$$W_w(I) = \bigcup_{i=1}^t W_w^i, W_b(I) = \bigcup_{i=1}^r W_b^i.$$

Внутренности таких областей целиком окрашены в один цвет, а увеличение этой границы на любое $\varepsilon > 0$ приводит к появлению внутри «подобласти» другого цвета.

Так как полученные области не обязательно выпуклы, то с помощью одного определенного эвристического алгоритма с использованием известных методов вычислительной геометрии разбиваем их на выпуклые части:

$$W_w^i = \bigcup_{j=1}^{l_i} W_w^{ij}, W_b(I) = \bigcup_{j=1}^{r_i} W_b^{ij}.$$

Конечно, это разбиение зависит от выбранного алгоритма. Мы требуем лишь применения одного и того же алгоритма разбиения для всех анализируемых изображений.

Теперь уже элементам выпуклого разбиения ставим в соответствие вершины графа, а правила построения ребер варьируем аналогично предыдущему случаю. Если «огрубить» эвристику разбиения изображения на выпуклые области, допустив наличия в них определенной части другого цвета (в черной области это белый), то можно уменьшить количество вершин в графе, что важно, так как анализируемые ниже алгоритмы практически применимы для графов с несколькими десятками вершин (как правило, до сотни).

Но с помощью графов можно учитывать не только «соседство», но и «размеры».

Каждой области разбиения

$$W_w^i = \bigcup_{j=1}^{l_i} W_w^{ij}, W_b(I) = \bigcup_{j=1}^{r_i} W_b^{ij},$$

сопоставляем число $S(i, j, c)$ – площадь области, где c – цвет области. Вводим параметр $0 \leq q \leq 1$.

Строим вспомогательный граф соседства областей $\Gamma(W)$, вершинам которого соответствуют области, а ребрами соединяются соседние из них.

Если соотношение площадей двух областей (меньшей к большей) не меньше q , то такие области назовем сопоставимыми.

Теперь строим наш основной граф. Его вершинам, как и в предыдущем случае, соответствуют построенные выпуклые области. Две области x и y соединяются ребром в следующем случае:

1. Они сопоставимы.
2. Любой кратчайший путь в графе соседства, соединяющий эти вершины проходит через области меньшей площади, чем площади x и y , причем эти области не сопоставимы ни с x , ни с y .

Полученный граф дает информацию о числах, размерах и взаимному расположению черных и белых областей.

Можно ввести и еще один параметр S^* – минимальную площадь рассматриваемой области и использовать его как своеобразный фильтр, выключая из рассмотрения небольшие области.

Вопросы применения теоретико-графовых конструкций для визуализации и распознавания объектов изучались во многих работах с разных точек зрения. В качестве примеров можно привести статьи [1]–[5].

Признаковое распознавание и графы

Если с первым примером все понятно: там значения признаков – числа, то во втором случае мы имеем более сложную ситуацию.

В отличие от первого примера, здесь каждому признаку изображения соответствует **алгоритм** построения соответствующего графа. А значением признака – **построенный граф**. Поэтому встает задача установления эквивалентности значения того или иного признака у разных изображений.

Здесь признаки – тоже объекты и должны быть их описания: $I(p_1), \dots, I(p_m)$.

Но можно предположить, что это более примитивные объекты по сравнению с объектом B , то есть описания $I(p_1), \dots, I(p_m)$ мы имеем, а описания самого $I(B)$ пока нет. При этом в такой схеме естественным выглядит следующий вопрос. Нам не нужно знать $I(B)$, целью является нахождение других его признаков: $I(p_{m+1}), \dots, I(p_n)$.

Если в качестве объекта B этот граф рассматривать по приведенной выше схеме, а в качестве признаков взять набор инвариантов графа: функций $p_1(B), \dots, p_m(B)$, то в качестве цели поиска может быть некоторый другой его инвариант: число ребер в этом графе.

Эта схема уже отличается от процедуры распознавания объекта по набору значений его признаков. Информацию об объекте мы черпаем не только из типа признака и его значения. Признаки могут быть взаимосвязаны. Если мы знаем, что один из них p_i есть функция другого $p_i = f(p_j)$, то значения этой функции могут дать дополнительную информацию.

Усложнение постановки можно продолжить. Но мы ограничимся только этими двумя: значение признаков – числа; значения признаков – графы, а сами эти графы-признаки на следующем шаге описываются набором своих признаков – чисел.

В любом случае – это поле для применения результатов теории распознавания.

Представленная так задача является классической в теории распознавания. Фундаментальный подход к решению задач распознавания на основе эвристических алгоритмов предложен Ю. И. Журавлевым.

Использование теоретикографовых построений для представления специфики задач распознавая в области специального рода химических проблем дано, например, в работах К. В. Рудакова и И. Ю. Торшина [6]–[8].

Вопрос использования графов для представления изображений изучался во многих работах с разных точек зрения. См., например, работы [9–10].

В нашей работе большое внимание уделено методам на основе использования инвариантов графа.

В частности, прямое использование инвариантов графа при распознавании объектов описывается в упомянутой выше работе [8].

Актуальность и применимость проблематики построения и анализа инвариантов графа обсуждается, в частности, в работах [11–12].

Возникает вопрос: что такое граф и что такое представление графа? На самом деле, мы, по-видимому, никогда не имеем дело с самим графом, а всегда – только с его «реализацией» или «представлением». Очевидно, что один и тот же объект по-разному можно представить или реализовать.

И вот на этом «стыке» между теорией графов и распознаванием изображений возникает тема, обсуждаемая во втором параграфе. Проблема распознавания графов, известная в теории графов уже более полувека, по-видимому, имеет ограниченное прикладное применение к распознаванию изображений.

С распознаванием графов тесно связано понятие инварианта. Оно появляется при попытке ответить на вопрос: два имеющихся различных представления соответствуют одному объекту или разным?

Во третьем параграфе статьи строятся несколько типов инвариантов графов и обсуждается их возможное применение в эвристических алгоритмах вышеупомянутых прикладных проблем.

Проблема распознавания графов и ее прикладное значение для распознавания изображений

Изображение I представлено графом $G(I)$. И мы теперь имеем дело именно с $G(I)$. В теории графов взаимосвязаны два понятия: «распознавание» и «восстановление».

Введем несколько необходимых определений и сделаем ряд замечаний.

Всюду рассматривается простой неориентированный граф $G = (X, U)$, имеющий n вершин и k ребер.

Пусть $X = \{A_1, \dots, A_n\}$, $U = \{r_1, \dots, r_k\}$. Пусть $t(A_i)$ – степень вершины A_i в графе G .

Граф с n вершинами и k ребрами можно задать списками ребер и вершин. В этом случае длина его кода (входного слова алгоритма, размера структуры данных) лежит между $4n + 10k$ и $4n + 10k + (n + 2k)[\lg n]$. Если граф задается списками соседей его вершин, то длина входа лежит между $2n + 8m$ и $2n + 8m + 2k[\lg n]$. Порядок же матрицы инцидентности графа равен $n^2 - n + 1$. Таким образом, под эффективным алгоритмом понимается процедура, сложность которой полиномиально зависит от n .

Это, безусловно, не значит, что вычислительные процедуры более высокие сложности неприменимы, но практическое использование подобных методов налагает естественные ограничения на величину n . При нынешнем уровне технологий, например, использование точных алгоритмов экспоненциальной сложности ограничивается графами с десятками или, в лучшем случае, сотнями вершин. См., например, [13].

Это ограничение обуславливает применение вместо точных алгоритмов эвристических.

Определение. Функция, определенная на множестве всех n -вершинных графов и принимающая одно и то же значение для изоморфных графов называется *инвариантом графа*.

Таким образом, инвариант $f(G)$ есть функция, которая может быть вычислена на любой реализации графа G . Она обладает тем свойством, что если между парой графов G_1 и G_2 есть отношение изоморфизма, т.е. $G_1 \sim G_2$, то $f(G_1) = f(G_2)$.

Проблема *восстановления* в теории графов связывается обычно с гипотезой Улама, хотя, безусловно, имеет значительно более широкие аспекты.

Определение. Подграф G_i , полученный из G выбрасыванием i -й вершины со всеми инцидентными ей ребрами, называется *примарным*.

Гипотеза Улама. Пусть G – n -вершинный неориентированный граф. Если заданы классы изоморфизма всех n примарных подграфов графа G , то при $n \geq 3$ класс изоморфизма графа G определяется однозначно.

В настоящее время гипотеза Улама не доказана и не опровергнута, так что она так и остается гипотезой.

Определение. Свойство T графа G называется *восстанавливаемым* если его можно выявить (решив задачу в форме распознавания, см. [13]), рассматривая все примарные подграфы графа G .

Граф G со свойством T называется *распознаваемым*.

Граф G называется *восстанавливаемым*, если восстанавливаем его класс изоморфизма.

Как уже было сказано выше, особо актуальна проблема восстановления и распознаваемости в теории графов.

В качестве примеров приведем следующие утверждения.

Утверждение 1. Если G – однородный граф, то он восстанавливаем.

Утверждение 2. Деревья являются распознаваемыми графами.

Это утверждение следует из того факта, что свойства связности графа и свойства отсутствия циклов является восстанавливаемыми. Так как дерево вполне характеризуется этими свойствами, то из упомянутого выше утверждения и следует Утверждение 2.

Утверждение 3. Двусвязные графы распознаваемы.

Утверждение 4. Однородные графы распознаваемы.

Одним из общих результатов, относящихся к восстанавливаемым характеристикам, является лемма Келли. Пусть H и K – графы. Обозначим через $\gamma(H, K)$ – число подграфов графа H , изоморфных графу K .

Лемма Келли. Если мощности множеств вершин графов H и K разные, то $\gamma(H, K)$ – восстанавливаемая характеристика графа G .

Из леммы Келли, среди прочих, можно вывести восстанавливаемость следующих графов и их характеристик: несвязные графы восстанавливаемы; дихромат графа является его восстанавливаемой характеристикой; число гамильтоновых циклов в графе является его восстанавливаемой характеристикой; хроматический многочлен графа является его восстанавливаемой характеристикой; характеристический многочлен графа является его восстанавливаемой характеристикой.

Ряд аналогичных результатов получен и в близкой проблеме реберного восстановления графов.

Уже видно, что восстанавливаемость оперирует с характеристиками графов, для нахождения которых в настоящее время нет полиномиальных алгоритмов. См. [13].

Дело в том, что техника доказательства подобных результатов базируется на смысле определения понятия «восстановление» и обычно проходит по следующей схеме.

1. Распознаваемость графа означает наличие у него восстанавливаемого свойства. Доказываемое свойство фиксируется. Берется конкретный граф G . Способ его задания не описывается. Предполагается, что каким бы этот способ не был, с его помощью строятся все n примарные подграфы графа G . Способ задания или описания таким образом построенных графов также не фиксируется.

2. Следующий шаг – перебор по примарным подграфам. Для каждого такого подграфа G_i в таком переборе считается известным («алгоритмически доступным») весь класс его изоморфизма $K(G_i)$. С теоретической точки естественно, что можно перебрать все изоморфные графы из $K(G_i)$, но без неизвестного на данный момент эффективного алгоритма такого перебора данная процедура не может быть представлена эффективным алгоритмом.
3. При этом переборе уже рассматриваются конкретные графы из $K(G_i)$ для них анализируется выполнимость восстанавливаемого свойства $K(G_i)$. При этом по каждому такому конкретному графу строится один или несколько конкретных графов из $K(G)$, для которых также устанавливается выполнимость восстанавливаемого свойства.
4. В завершение доказывается корректность перебора. (Как правило, эта часть опускается в силу очевидности вопроса.)

Отсюда следует, что включение в практический алгоритм распознавания изображений, основанный на представлении изображений графами, процедура распознавания графов приводит к тому, что сложность алгоритма не может быть меньше $f(n)$, где $f(n)$ – сложность решения задачи изоморфизма для n -вершинных графов.

Переход к примарным графам приводит к тому, что техника доказательства утверждений в области распознавания графов широко использует метод, который может лечь в основу эвристики для распознавания изображений. Это метод декомпозиции. Он, в каком-то смысле, позволяет обойти ограничение на рост параметра n . Речь идет об очевидной простой схеме.

Пусть в нашем распоряжении есть процедура решения задачи изоморфизма сложности $f(n)$, которая применима для $n < k$, и мы можем себе позволить потратить время $sf(k)$ на решение задачи распознавания графа.

Алгоритм 1. Исходный граф G представляется в виде совокупности графов $G_{p_i}^1$, $i = 1, \dots, s_1$. В свою очередь, каждый из этих графов представляется совокупностью G_{p_i, p_j}^2 , $j = 1, \dots, s_{1i}$. И так далее.

1. Число уровней иерархии l определяется на основе параметров s , $f(k)$ и способа представления.
2. Способ представления (декомпозиции) зависит от специфики изображения или особенностей задания этого изображения в виде графа. Обращаем внимание, что с прикладной точки зрения, напрашиваются следующие подходы: разбиение на примарные подграфы; физическое разбиение изображения на части (см. примеры из предыдущего раздела), что влечет актуальность таких

характеристик графа, как планарность, хроматическое число, наличие и расположение «мостов», и т.д.

3. Затем организуется процедура восстановления графа по частям, начиная с графов уровня l , и заканчивая графом G .

Другой взгляд на описанное здесь алгоритмическое противоречие между понятием распознавание графа и требованием к эффективности практического алгоритма распознавания изображения, связан с использованием инвариантов графа.

Инварианты графа и проблема распознавания

Инварианты и возможности их использования

Примерами широко известных инвариантов являются, так называемые, основные числа теории графов: хроматическое число, число внутренней устойчивости (число независимости), число внешней устойчивости, плотность графа, кликоматическое число, толщина и т.д. Хорошо известными инвариантами свойствами графа являются: гамильтоновость, связность, двудольность, планарность и т.д.

По существу, инвариант – это функция, не зависящая от нумерации вершин графа и потому довольно естественно, что в реальных ситуациях функции на графе являются инвариантами.

Ясно, что многие инварианты графа не являются независимыми между собой и связаны разного рода соотношениями. Например, число независимости $\alpha(G)$ и плотность $\varphi(G)$ графа G связаны между собой сведущим равенством: $\alpha(G) = \varphi(\bar{G})$, где $\bar{G}$ – дополнение графа G . Или хорошо известно неравенство: $\alpha(G)\gamma(G) \geq n$, $\gamma(G)$ – хроматическое число n -вершинного графа G .

Таким образом, имеется очень много различных инвариантов графов. В связи с этим возникает естественная проблема порождения или описания инвариантов в терминах базисных элементов или каким-либо другим способом.

Определение. Система инвариантов $\{f_1, \dots, f_s\}$ называется полной, если выполнены два условия: из того, что два графа изоморфны, следует, что их полные системы инвариантов совпадают, а для пары неизоморфных графов они не совпадают.

Ясно, что если мы все n вершинные графы разобьем на классы изоморфизма $T_1, \dots, T_N$, то номер класса изоморфизма является инвариантом графа, через который может быть получен (в принципе) любой другой инвариант, т.к., зная номер класса изоморфизма, мы можем взять любой граф из этого класса и на нем «автоматически» вычислить любой инвариант.

Однако этот «полный инвариант» не является практически удовлетворительным в силу сложности его нахождения. С другой стороны, «обычный»

инвариант графа должен вычисляться по любому представлению графа и для его нахождения вовсе не надо иметь таблицу классов изоморфизма всех n -вершинных графов.

В связи со всем сказанным выше возникает два вопроса.

1. Что такое *базисный* и что такое *составной (сложный)* инвариант графа?
2. Что такое *естественный* инвариант графа?

Например, число ребер графа можно считать базисным инвариантом. А такие функции, такие как основные числа графа, связность, числа Бетти и т.д. являются естественными инвариантами графа. В то же время такой инвариант, как номер класса изоморфизма вряд ли можно признать естественным.

Вернемся к практической задаче. Во введении мы сформулировали два взгляда на эту задачу. С точки зрения первого примера, изображению сопоставлен единственный граф, а в признаковой таблице его признаками являются числовые значения характеристик (например, инвариантов) этого графа. Во втором случае значением признака является сам граф, но для установления совпадения значений признака у разных изображений приходим к задаче изоморфизма графов, которая, в свою очередь может быть сведена к анализу инвариантов рассматриваемых графов-признаков.

Оба подхода содержат следующую схему.

Имеется несколько изображений одного и того же объекта $I_1, \dots, I_m$, полученных с помощью средств $T_1, \dots, T_m$. В нашем распоряжении есть набор инвариантов $f_1, \dots, f_s$. (Они, в частности, могут рассматриваться как признаки.) Если их значения на графах $G_1, \dots, G_m$ могут быть вычислены с помощью эффективного алгоритма, то они практически применимы в эвристической процедуре, основанной на признаковой таблице, элементами которой являются они сами $a_{ij} = f_j(G_i)$ или некоторые функции от них $a_{ij} = F(f_j(G_i))$.

Далее используется предположение, что из неравенства инвариантов следует, что графы не изоморфны, а соответствующие им изображения различны. Практическое применение этого эвристического подхода мы здесь не обсуждаем, а лишь подчеркиваем три его очевидных требования:

1. Наличие эффективной процедуры вычисления инварианта.
2. Необходимость учета специфики задачи для выбора инвариантов.
3. Использование как можно более широкого и разнообразного набора инвариантов.

В качестве примера приведем использование подхода к распознаванию деревьев. На сегодняшний день одним из самых интересных результатов

в этой области является теорема Смоленского-Зарецкого. Ее можно найти, например, в [14].

Для любой пары висячих вершин дерева единственным образом определяется расстояние между ними. Пусть $D(T)$ – набор таких расстояний (с их кратностями) для дерева T . Согласно этой теореме, изоморфные деревья T и T' обязательно имеют одинаковые наборы $D(T)$ и $D(T')$. Но совпадение $D(T)$ и $D(T')$ еще не означает изоморфизма деревьев. Нужно еще так проиндексировать висячие вершины обоих деревьев, чтобы совпадали расстояния, чтобы совпадали расстояния между парами одинаково проиндексированных вершин.

А число висячих вершин в дереве уже может быть другого порядка, чем n . Тем самым, если за счет учета специфики задачи можно ограничиться деревьями, то, например, при числе висячих вершин $O(\log n)$ выполняется и первое из приведенных выше требований: наличие эффективного алгоритма проверки изоморфизма.

В следующем разделе мы дадим примеры новых типов инвариантов графов, которые могут быть использованы в описанном подходе.

Примеры новых типов инвариантов

Выше мы говорили, что инварианты можно рассматривать в некоторой иерархии: от простых – базисных, к составным – сложным.

В трех ниже приведенных примерах описаны новые, на наш взгляд, практически применимые, типы инвариантов. Они зависят от параметра, значения которого ограничивают их практическую применимость.

Один из самых известных способов задания нумерованного графа – перечень соседей его вершин. Будем называть это множество соседей вершины v множеством вершин, порожденных вершиной v . Аналогично, ребра между v и этими вершинами назовем множеством ребер, порожденным v .

Обозначим через Δ_s^m – число совокупностей из s ребер графа, которые порождают m вершин ($s = 1, \dots, k$; $m = 2, \dots, n$). Этот набор чисел, рассматриваемый как множество, уже не зависит от нумерации вершин графа, поэтому является инвариантом (системой инвариантов) графа.

Из этих инвариантов, как из составных частей, ниже мы построим более сложные.

Теперь рассмотрим еще один пример множества базисных инвариантов. В k -реберном графе можно рассмотреть C_k^s совокупностей, состоящих из s ребер. Они порождают подграфы с разным числом вершин и компонент связности.

Если мы теперь обозначим через $\delta_{m,t}^s$ – число совокупностей из s ребер графа G , образующих t – вершинные подграфы с m компонентами связности,

то получим еще один инвариант (систему инвариантов) графа.

Введем еще один инвариант: набор «обобщенных» степеней вершин графа.

Обозначим через γ_s^m число совокупностей из s вершин графа G , которые порождают m вершинные подграфы G . Другими словами, подграф, порожденный вершинами $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}\}$ входят сами эти вершины плюс те вершины, которые смежные по крайней мере с одной из входящих в множество $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}\}$ вершиной.

Все эти примеры носят «локальный» характер:

1. Используются в их определениях только два понятия: что такое вершина графа, что такое ребро графа.
2. Число-инвариант рассчитывается по одному конкретному объекту: подмножеству вершин или ребер графа.

Теперь на их основе будем строить более сложные инварианты. Эти примеры будут касаться хорошо известных инвариантов, но в качестве следствий из полученных конструкций мы сможем получить новые свойства известных инвариантов.

Использование этих инвариантов в алгоритмах распознавания требует ограничения на их количество.

Поэтому при рассмотрении инвариантов типа Δ_s^m берется случай, когда s и m являются константами. В такой ситуации числа Δ_s^m полиномиально вычислимы.

При рассмотрении инвариантов типа $\delta_{m,t}^s$ берется случай, когда s, t и m являются константами. В такой ситуации числа $\delta_{m,t}^s$ полиномиально вычислимы.

При рассмотрении инвариантов типа γ_s^m берется случай, когда s и m являются константами. В такой ситуации числа γ_s^m полиномиально вычислимы.

Как выше было уже сказано, при декомпозиционных и иерархических представлениях естественно использовать хроматические характеристики графа.

Физическое разбиение изображения при декомпозиционном подходе естественно привлекает внимание к минимизации связей между частями. Некоторые классы изображений имеют определенные ограничения на «схожесть» частей, например, эта «схожесть» различна в случае пейзажа и фото геометрической фигуры, и т.п. Здесь актуальны другие характеристики графа, например, связанные с числом его внешней или внутренней устойчивости.

Конечно, вычисление хроматического числа и чисел его внешней или внутренней устойчивости в настоящее время не может быть осуществлено эффективно. Поэтому нижеприведенное рассмотрение дано для пояснения смысла введенных инвариантов и аргументации их практического применения.

Некоторые элементы техники доказательств приведенных ниже утверждений можно найти в [15].

Пример 3.

Сначала рассмотрим такой инвариант как число независимости графа $\alpha(G)$.

Напомним, что множество вершин графа называется *независимым (внутренне устойчивым)*, если никакие две вершины в этом множестве не являются смежными. А число вершин в наибольшем по мощности независимом множестве графа называется *числом независимости (числом внутренней устойчивости)*.

Пусть $G = (X, U)$ n -вершинный неориентированный граф, имеющий k -ребер: $r_1, \dots, r_k$. Обозначим через Δ_s^m – число совокупностей из s ребер графа, которые порождают m вершин ($s = 1, \dots, k$; $m = 2, \dots, n$). Ясно, что если R – некоторая совокупность из s ребер, то максимальная мощность множества вершин, которое она порождает равно $2s$, а минимальное – это $s + 1$. В частности, если граф представляет собой «звезду», имеющая k вершин и $k - 1$ ребро, то и при $m \neq s + 1$ справедливо соотношение $\Delta_s^m = 0$, а $\Delta_s^{s+1} = C_{k-1}^s$.

Обозначим через $L(n, r)$ число независимых подмножеств графа G мощности r . Пусть V_i – множество подграфов графа мощности r , содержащих ребро r_i . Тогда множество

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i$$

содержит все подграфы графа G , так как каждый из таких подграфов содержит хотя бы одно ребро графа G .

Отсюда следует соотношение: $L(n, r) = C_n^r - |V|$. Но из формулы включения-исключения имеем равенство:

$$\begin{aligned} |V| &= \sum_{i=1}^k |V_i| - \sum_{i < j} |V_i \cap V_j| + \dots \\ &\dots + (-1)^s \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_s}| + \dots \\ &\dots + (-1)^k |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_k}|. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\delta(i_1, \dots, i_s)$ – число вершин, «порождаемых» множеством ребер $(r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_s})$, т.е. инцидентных этим ребрам, а, если вершина инцидентна нескольким ребрам, то в таком подсчете она учитывается только один раз.

С учетом этих обозначений имеем соотношения:

$$\begin{aligned} |V| &= C_{n-2}^{r-2}, |V_i \cap V_j| = C_{n-\delta(i,j)}^{r-\delta(i,j)}, \sum_{i < j} |V_i \cap V_j| = \\ &= \sum_{i < j} C_{n-\delta(i,j)}^{r-\delta(i,j)} = \sum_{t=3}^4 \Delta_2^t C_{n-t}^{r-t}, \dots, \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_s}| = \\ &= \sum_{i < j} C_{n-\delta(i, \dots, i_s)}^{r-\delta(i, \dots, i_s)} = \sum_{t=s+1}^{2s} \Delta_s^t C_{n-t}^{r-t}. \end{aligned}$$

Пусть теперь среди вершин графа есть q изолированных вершин. Так как $\delta(1, 2, \dots, k)$ – это число

вершин графа G , которые порождаются всеми его ребрами, то $\delta(1, 2, \dots, k) = n - q$. Тогда с учетом вышеприведенных соотношений получаем выражение:

$$\begin{aligned} L(n, r) &= C_n^r - C_k^1 C_{n-2}^{r-2} + \sum_{t=3}^4 \Delta_2^t C_{n-t}^{r-t} + \dots \\ &\dots + (-1)^s \sum_{t=s+1}^{2s} \Delta_s^t C_{n-t}^{r-t} + \dots + (-1)^k C_q^{r+q-n}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили выражение для $L(n, r)$ через систему инвариантов $\{\Delta_s^m\}$. Теперь заметим, что если $L(n, r) = 0$ для некоторого r , то в графе нет независимых множеств мощности r .

Отсюда следует, что $\alpha(G) \leq r$. Таким образом получается, что число независимости графа есть минимальный натуральный корень полинома $L(n, r)$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Если r_0 – минимальный натуральный корень полинома $L(n, r)$, то $\alpha(G) = r_0$.

Пример 4.

Теперь рассмотрим другой инвариант – хроматическое число графа. Напомним, что h -раскраской графа называется отображение f множества его вершин на множество $\{1, \dots, h\}$. Раскраска называется правильной, если для $u \neq v$ справедливо соотношение: $f(u) \neq f(v)$. В этом случае граф называется h -раскрашиваемым. Хроматическим числом графа G называется минимальное натуральное число h , при котором граф G является h -раскрашиваемым.

Пусть, как обычно, граф $G = (X, U)$ имеет n вершин и k ребер.

Обозначим через $\Phi(n, r)$ число правильных раскрасок графа G в r -цветов.

Как и в предыдущем случае через V_i обозначим множество раскрасок графа G r цветов, при которых ребро r_i раскрашено неправильно. Тогда множество

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i$$

содержит все неправильные раскраски графа G в r цветов. Ясно, что $\Phi(n, r) = r^n - |V|$. Вновь, используя формулу включения-исключения, получаем

$$\begin{aligned} |V| &= \sum_{i=1}^k |V_i| - \sum_{i < j} |V_i \cap V_j| + \dots \\ &\dots + (-1)^s \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_s}| + \dots \\ &\dots + (-1)^k |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_k}|. \end{aligned}$$

Далее имеем $|V_i| = r \cdot r^{n-2} = r^{n-1}$, $|V_i \cap V_j| = r^{n-2}$.

Эти равенства следуют из того факта, что в случае, когда ребра r_i и r_j не являются инцидентными, то каждое из множеств вершин, порождаемых этими ребрами, можно независимо красить в один цвет, а остальные $n - 4$ вершины красятся произвольно. Таким образом общее число раскрасок в этом варианте равно $r^2 \cdot r^{n-4} = r^{n-2}$.

Если же рассматриваемые ребра образуют цепь, то все ее вершины должны быть окрашены одинаково

и число таких раскрасок равно r . Оставшиеся же $n - 3$ вершины красятся произвольно. Поэтому общее число раскрасок в этом случае равно $r \cdot r^{n-3} = r^{n-2}$.

В общем случае величина $|V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_s}|$ вычисляется следующим образом. Если совокупность ребер $(r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_s})$ образует подграф с t вершинами и m компонентами связности, то число раскрасок, при которых каждое из ребер этой совокупности будет раскрашено неправильно равно следующей величине:

$$r^m \cdot r^{n-t} = r^{n+m-t}.$$

Доказательство этого утверждения опирается на следующую лемму.

Лемма. Если все ребра связного подграфа окрашены неправильно, то все они окрашены в один цвет.

Если мы теперь обозначим через $\delta_{m,t}^s$ – число совокупностей из s ребер графа G , образующих t – вершинные подграфы с m компонентами связности, то получим, используя вышеприведенные формулы, следующее соотношение.

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_s}| = \sum_{m,t} \delta_{m,t}^s r^{n+m-t}.$$

Отсюда окончательно получаем формулу

$$\Phi(n, r) = r^n - kr^{n-1} + C_k^2 r^{n-2} - \dots \\ \dots + (-1)^s \sum_{m,t} \delta_{m,t}^s r^{n+m-t} + \dots + (-1)^k r^{n+d-k}.$$

В ней через d обозначено число компонент связности графа G .

Таким образом функция $\Phi(n, r)$ выражается через систему инвариантов $\{\delta_{m,t}^s\}$.

Заметим далее, что, если $\Phi(n, r) = 0$, то для хроматического числа $\gamma(G)$ графа G имеем оценку: $\gamma(G) > r$.

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\Phi(n, 1) = \Phi(n, 2) = \dots = \Phi(n, p-1) = 0$, а $\Phi(n, p) \neq 0$, то $\gamma(G) = p$.

Пример 5.

Дальнейшее рассмотрение относится к числу внешней устойчивости графа. Напомним, что число внешней устойчивости графа – это наименьшая мощность множества его вершин такого, что любая вершина графа смежна хотя бы с одной вершиной этого множества.

Пусть вновь граф $G = (X, U)$ имеет n вершин и k ребер. $X = \{A_1, \dots, A_n\}$. Обозначим через $F(n, r)$ число внешне-устойчивых множеств этого графа, состоящих из r вершин. Число внешней устойчивости графа G обозначим через $\beta(G)$.

По аналогии с предыдущими случаями обозначим через V_i совокупность подмножеств вершин мощности r графа G , которые не покрывают вершину A_i .

Или, другими словами, в V_i не входят подмножества, содержащие смежные с A_i вершины. Пусть $t(A_i)$ – степень вершины A_i в графе G .

Тогда справедливо соотношение:

$$|V_i| = C_{n-t(A_i)-1}^{r-t(A_i)-1}.$$

Далее, пусть число вершин в подграфе, порожденных вершинами A_i и A_j , т.е. число вершин, каждая из которых смежна либо с A_i , либо с A_j . Тогда

$$|V_i \cap V_j| = C_{n-\gamma(i,j)}^{r-\gamma(i,j)}.$$

Аналогично определим функцию $\gamma(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s})$ как число вершин в подграфе, порожденном вершинами $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}\}$.

Тогда справедливо равенство:

$$|V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_s}| = C_{n-\gamma(A_{i_1}, \dots, A_{i_s})}^{r-\gamma(A_{i_1}, \dots, A_{i_s})}.$$

Далее заметим, что

$$F(n, r) = C_n^r - \left| \bigcup_{i=1}^n V_i \right|.$$

Учитывая изложенное выше, имеем

$$F(n, r) = C_n^r - \sum_{i < j} |V_i \cap V_j| + \dots \\ \dots + (-1)^s \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_s} |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_s}| + \dots \\ \dots + (-1)^n |V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \dots \cap V_{i_n}| = \sum_{m=1}^n \gamma_1^m C_{n-m}^{r-m} - \\ - \sum_{m=1}^n \gamma_2^m C_{n-m}^{r-m} + \dots + (-1)^s \sum_{m=1}^n \gamma_s^m C_{n-m}^{r-m}.$$

Здесь через γ_s^m обозначено число совокупностей из s вершин графа G , который порождают m вершинные подграфы G . Другими словами, подграф, порожденный вершинами $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}\}$ входят сами эти вершины плюс те вершины, которые смежные по крайней мере с одной из входящих в множество $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}\}$ вершиной.

Обозначим через t_r число вершин степени r в графе G . С учетом этого обозначения, заметим, в частности, что $\gamma_1^m = t_{r-m}$.

Применяя ту же технику, что и в предыдущих случаях, окончательно получаем следующее соотношение.

$$F(n, r) = C_n^r - \sum_{m=1}^n t_{r-m} C_{n-m}^{r-m} + \\ + \sum_{m=1}^n \gamma_2^m C_{n-m}^{r-m} - \dots + (-1)^s \sum_{m=1}^n \gamma_s^m C_{n-m}^{r-m}.$$

Если мы определим понятие обобщенной степени для заданной совокупности вершин как множество вершин графа G , смежных хотя бы с одной из входящих в заданную совокупность вершиной, то γ_s^m будет означать число s -совокупностей с обобщенной степенью m .

Теорема 3. Если $F(n,1) = F(n,2) = \dots = F(n,p-1) = 0$, а $F(n,p) \neq 0$, то $\beta(G) = p$.

Таким образом инвариант графа $\beta(G)$ выражается через систему инвариантов $\{\gamma_s^m\}$ являющихся обобщенными степенями совокупностей вершин.

В свете введенного определения «обобщенной степени», нетрудно заметить, что система инвариантов $\{\Delta_s^m\}$ представляет собой обобщенные степени совокупностей ребер графа G .

Заключительные замечания

Теоремы 1–3 представляют интерес в области теории графов, посвященной построению и анализу различных инвариантов графа.

Алгоритмы, построенные на их основе, в общем случае являются переборными. Поэтому в этом случае они могут быть использованы либо для графов с небольшим числом вершин, либо на основе декомпозиционного эвристического подхода, описанного во втором параграфе.

Однако пример с теоремой Смоленского-Зарецкого говорит о том, что на специальных классах графов трудоемкость алгоритмов может быть иная.

В заключение сделаем одно замечание. При распознавании на основе признаков важно иметь «качественные» (эффективно различающие) признаки. См., например, [1].

Для случая инвариантов, которые могут принимать одинаковые значения и для неизоморфных графов, можно считать, что инвариант I разбивает

все множество нумерованных n -вершинных графов на $k(n)$ подмножеств $W_1, \dots, W_{k(n)}$, на элементах каждого из которых он принимает одинаковые значения. В свою очередь, каждое из этих подмножеств W_j разбивается на $l(j)$ частей: W_{ju} , состоящих из изоморфных графов.

В этой связи качество (силу) инварианта можно, например, задать следующим образом:

$$\xi_{I(n)} = \max_{j=1, \dots, k(n)} \max_{i=1, \dots, l(j)} \frac{|W_{ji}|}{|W_j|}.$$

То есть, чем «сильнее» инвариант, тем больше доля изоморфных графов среди всех графов, на которых он принимает одинаковое значение.

Так как в классической задаче распознавания большую роль играет «вес» признака, то «сила инварианта» также может быть при этом использована.

Она, в частности связана с вопросом, что несет больше информации о графе G : хроматическое число $\chi(G)$ или число независимости $\alpha(G)$?

Конечно, если бы на множестве n -вершинных графов G_n было, например, задано равномерное распределение и мы бы знали $p(\chi(G))$ – вероятность того, что значение инварианта (например, хроматического числа) некоторого графа G равно $\chi(G)$, тогда энтропия

$$H(n) = \sum_{G \in G_n} p_{\chi(G)} \log \frac{1}{p_{\chi(G)}}$$

и может называться «информацией» о графе по этому инварианту.

Литература

1. Каркищенко А. Н., Мнухин В. Б. Метод детекции характерных точек изображения с помощью знакового представления // Известия ЮФУ. Технические науки, 2020. Том 214. № 4, стр. 59–70.
2. Баженов А. В., Филякин А. А. Теорема графов как основа построения систем связи // Universum: технические науки: электрон. научн. журнал, 2022. № 3(96).
3. Акбашева Е. А., Акбашева Г. А., Тлупов И. З. Методы представления текстовых документов на основе графов в задачах обработки естественного языка // Информатика, вычислительная техника и управление. Серия: Естественные и технические науки. 2022. № 11, стр. 67–72.
4. Степкина А. В., Степкина А. С. Алгоритмы распознавания простых графов коллективным агентом // Компьютерные исследования и моделирование, 2021., том 13, № 1. С.33–45. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-33-45.
5. Nagavarapu S. C., Vachhani L., Sinha A. et al. Generalizing Multi-agent Graph Exploration Techniques // International Journal of Control, Automation and Systems. 2020. Vol. 19. P. 491–504. <https://doi.org/10.1007/s12555-019-0067-8>.
6. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Topological Chemograph Analysis Theory as a Promising Approach to Simulation Modeling of Quantum-Mechanical Properties of Molecules. Part II: Quantum-Chemical Interpretations of Chemograph TheoryPattern // Recognition and Image Analysis. 2022. Vol. 22. P. 205–217.
7. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Topological Chemograph Analysis Theory As a Promising Approach to Simulation Modeling of Quantum-Mechanical Properties of Molecules. Part I: Quantum-Chemical Interpretations of Chemograph TheoryPattern // Recognition and Image Analysis. 2021. Vol. 21. P. 800–810.
8. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Local completeness of the 'chemographs' invariants in view of the combinatorial theory of solvability // Pattern Recognition and Image Analysis. 2014. Vol. 24. P. 196–208.
9. Абгалдаева А. А., Пушкин А. Ю. Применение теории графов в сфере информационных технологий // Universum: технические науки: электрон. научн. журн. 2023. № 2(107). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/15061>.
10. Сапунов С. В., Сенченко А. С. Лингвистическое представление графов с помеченными вершинами // Доповіді Національної академії наук України. 2019. № 11. С. 17–24.
11. Курапов С. В., Давидовский М. В. Вычислительные методы определения инвариантов графа // International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162. 2021. Vol. 9, № 2. С. 1–8.
12. Тутыгин Р. А., Зяблицева Л. В. Эффективность инвариантов графов, соответствующих полугруппам // Сб трудов конференции: Материалы VI Международной научно-практической конференции (школы-семинара) молодых ученых. Тольятти, 2020. С. 114–117.
13. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи // М.: Мир, 2012.
14. Zykov A. A., Graphs Theory (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
15. Леонтьев В. К. Комбинаторика и информация. Часть 1. Комбинаторный анализ. М.: МФТИ, 2015. 174 с.

ON THE USE OF GRAPH THEORY IN THE CLASSIFICATION INFORMATION

Gordeev E. N.³, Leontiev V. K.⁴

Keywords: recognition, feature tables, heuristics, reconstruction, graph invariant, chromatic number, independence number, number of external stabilities, number of internal stabilities.

The purpose of this work is to analyze the possibilities of applying graph theory for image coding and classification, which is especially relevant in connection with the use of artificial intelligence methods for image classification.

Research method: combinatorics and graph theory, as well as heuristic algorithms.

Results: The paper discusses the possibility of applying the classical results of graph theory concerning the problems of graph recovery and recognition and their characteristics in the field of image recognition. At the same time, various aspects of the problem of describing (representing) graphs using their invariants are analyzed.

New classes of invariants for graphs are introduced and considered, which, in particular, can be used for image analysis and classification. In addition, the statements proved in the article relate to such aspects of the problem as the formation of complex types of invariants on the basis of basic ones and the finding of functional dependencies of some invariants on others.

Scientific novelty: new composite invariants of graphs that can be effectively used in the recognition of graph-based images are constructed and substantiated.

References

1. Karkishhenko A. N., Mnuhin V. B. Metod detekcii harakternyh toчек izobrazheniya s pomoshh'ju znakovogo predstavleniya // Izvestiya JuFU. Tehnicheskie nauki, 2020. Tom 214. № 4, str. 59–70.
2. Bazhenov A. V., Filjakin A. A. Teorema grafov kak osnova postroeniya sistem svyazi // Universum: tehnicheskie nauki: jelektron. nauchn. zhurnal, 2022. № 3(96).
3. Akbasheva E. A., Akbasheva G. A., Tlupov I. Z. Metody predstavleniya tekstovykh dokumentov na osnove grafov v zadachah obrabotki estestvennogo jazyka // Informatika, vychislitel'naja tehnika i upravlenie. Seriya: Estestvennye i tehnicheskie nauki. 2022. № 11, str. 67–72.
4. Stepkina A. V., Stepkina A. S. Algoritmy raspoznavaniya prostykh grafov kolektivnym agentom // Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie, 2021., tom 13, № 1. S.33–45. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-33-45.
5. Nagavarapu S. C., Vachhani L., Sinha A. et al. Generalizing Multi-agent Graph Exploration Techniques // International Journal of Control, Automation and Systems. 2020. Vol. 19. P. 491–504. <https://doi.org/10.1007/s12555-019-0067-8>.
6. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Topological Chemograph Analysis Theory as a Promising Approach to Simulation Modeling of Quantum-Mechanical Properties of Molecules. Part II: Quantum-Chemical Interpretations of Chemograph TheoryPattern // Recognition and Image Analysis. 2022. Vol. 22. P. 205–217.
7. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Topological Chemograph Analysis Theory as a Promising Approach to Simulation Modeling of Quantum-Mechanical Properties of Molecules. Part I: Quantum-Chemical Interpretations of Chemograph TheoryPattern // Recognition and Image Analysis. 2021. Vol. 21. P. 800–810.
8. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. Local completeness of the 'chemographs' invariants in view of the combinatorial theory of solvability // Pattern Recognition and Image Analysis. 2014. Vol. 24. P. 196–208.
9. Abgaldaeva A. A., Pushkin A. Ju. Primenenie teorii grafov v sfere informacionnykh tehnologij // Universum: tehnicheskie nauki: jelektron. nauchn. zhurn. 2023. № 2(107). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/15061>.
10. Sapunov S. V., Senchenko A. S. Lingvisticheskoe predstavlenie grafov s pomechennymi vershinami // Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraïni. 2019. № 11. S. 17–24.
11. Kurapov S. V., Davidovskij M. V. Vychislitel'nye metody opredeleniya invariantov grafa///International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162. 2021. Vol. 9, № 2. S. 1–8.
12. Tutygin R. A., Zjabliceva L. V. Jefferktivnost' invariantov grafov, sootvetstvujushhih polugruppam // Sb trudov konferencii: Materialy VI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii (shkoly-seminara) molodyh uchenyh. Tol'jatti, 2020. S.114–117.
13. Gjeri M., Dzhonson D. Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi // M.: Mir, 2012.
14. Zykov A. A., Graphs Theory (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
15. Leont'ev V. K. Kombinatorika i informacija. Chast' 1. Kombinatornyj analiz. M.: MFTI, 2015. 174 s.



3 Eduard N. Gordeev, Dr.Sc. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of IU-8 «Information Security» of the Bauman Moscow State Technical University. Moscow, Russian Federation. E-mail: werhornorgord@gmail.com

4 Vladimir K. Leontiev, Dr.Sc. of Physical and Mathematical Sciences, Computer Center of the Institute of Computer Science «Informatics and Control», Moscow, Russia. E-mail: vkleontiev@yandex.ru